

## MATRICES CON COEFICIENTES REALES

**1.- Definición de matriz:** Una matriz real de orden  $m \times n$  siendo  $m$  y  $n$  números naturales es un conjunto de  $m \times n$  números reales distribuidos en “ $m$ ” filas y “ $n$ ” columnas.

A  $m \times n$  le llamaremos **dimensión** de la matriz.

Ejemplos:  $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$  ;  $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 5 & -8 \\ 4 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$

A los números que componen las matrices se les llama **coeficientes**. Se representan en general por la expresión  $a_{ij}$  donde “ $i$ ” representa la fila y “ $j$ ” la columna en la que se encuentra.

Ejemplo:  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

## 2.- Tipos de matrices más usuales.

### Definiciones:

- Llamaremos matriz **cuadrada** a aquella que tenga el mismo número de filas que de columnas, es decir, cuya dimensión sea  $n \times n$
- Si no es cuadrada la llamaremos **rectangular**
- A las matrices con una sola fila las llamaremos **matriz fila** Ejemplo:  $(5, -2, 6)$
- A las matrices con una sola columna las llamaremos **matriz columna**. Ejemplo:  $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$
- Dada una matriz  $A$ , su **traspuesta** ( $A^t$ ) es la que se obtiene al cambiar filas por columnas o viceversa, pero siempre en el mismo orden.

Ejemplo:  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$   $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

- Si todos los coeficientes de la matriz son 0 se llama **matriz nula**.

Ejemplos:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$   $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

- En las matrices cuadradas los coeficientes de la forma  $a_{ii}$  forman la **diagonal principal**. La otra diagonal se llama **secundaria**.

Ejemplos:  $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$   $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix}$   
 Diagonal principal                      Diagonal secundaria

- Una matriz cuadrada es **simétrica** si se cumple que  $a_{ij} = a_{ji}$ . Ejemplo:

$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 9 \\ -3 & 1 & 8 \\ 9 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

En términos coloquiales, si los coeficientes son simétricos respecto a la diagonal principal.

- Una matriz cuadrada es una matriz **diagonal** si los coeficientes que no están en la

diagonal principal son 0. Ejemplo:  $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

j) Una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1 se llama **matriz unidad o identidad**. Ejemplo:  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Todas ellas son cuadradas y las hay de cualquier dimensión

k) Una matriz cuadrada en la que todos los elementos por encima o debajo de la diagonal principal son 0 se llama **matriz triangular**. Ejemplo:  $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

### 3.- Igualdad de matrices

Dos matrices son **iguales** si tienen la misma dimensión y además todos los coeficientes son iguales respectivamente. (han de ser la misma matriz)

Ejemplo: Calcula a, b, c y d para que las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & -3 \\ b & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} c & 7 \\ 1 & d \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  sean iguales

Solución: Comparándolas se tiene que a = 7; b = 5; c = 2; d = -3

### 4.- Operaciones con matrices

**a) Suma.** Dadas dos o más matrices del **mismo orden**, su suma es otra matriz con la misma dimensión cuyos coeficientes se obtienen como suma de los coeficientes colocados en el mismo lugar de las matrices a sumar.

Ejemplo:  $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} + \begin{pmatrix} 6 & 4 & -7 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -3 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$   
Es decir,  $(A + B) = (a_{ij} + b_{ij})$

La suma de matrices cumple las propiedades:

- Conmutativa:  $A + B = B + A$
- Asociativa:  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Elemento Neutro: La matriz nula

**b) Multiplicación de un número real por una matriz.** Para multiplicar una matriz cualquiera por un número real, se multiplican todos los elementos de la matriz por dicho número real.

Ejemplo:  $-2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & -8 \\ 0 & 4 & -12 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

Esta operación cumple las propiedades asociativas:

- Asociativa con dos matrices:  $A(aB) = aAB$
- Asociativa con dos números reales:  $(ab)A = a(bA)$
- Elemento Neutro: El número 1 cumple que  $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$

c) **Producto de matrices.** El resultado de multiplicar dos matrices es otra matriz en la que el elemento que ocupa el lugar  $c_{ij}$  se obtiene sumando los productos parciales que se obtienen al multiplicar todos los elementos de la fila “i” de la primera matriz por los elementos de la columna “j” de la segunda matriz.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1(-1) + (-2) \cdot 7 & 1 \cdot 5 + (-2)(-2) & 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 6 \\ 4(-1) + 5 \cdot 7 & 4 \cdot 5 + 5(-2) & 4 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 9 & -8 \\ 31 & 10 & 46 \end{pmatrix}$$

Nótese que para que esta operación tenga sentido tal y como se ha definido, es preciso que el **número de columnas de la primera matriz, coincida con el de filas de la segunda**. En caso contrario no casarían las multiplicaciones parciales.

**La matriz resultante tiene el número de filas de la primera y el de columnas de la segunda.**

Esta operación cumple las propiedades asociativas:

- Asociativa:  $A(BC) = (AB)C$
- Elemento Neutro en matrices cuadradas: El número  $I_{n \times n}$  cumple que:  
 $I_{n \times n} \cdot A = A \cdot I_{n \times n} = A$
- Conmutativa: NO SE CUMPLE DE FORMA GENERAL, aunque hay algunas matrices que sí que lo cumplen.
- Distributiva de la suma respecto del producto:  $A(B + C) = AB + AC$  pero ojo siempre respetando el orden de multiplicación por la propiedad anterior.

Nota: **La operación división** de forma general en matemáticas se define multiplicando por el inverso del divisor. En este caso tendríamos que definir la **matriz inversa**, que se hará más adelante. En este sentido, lo primero sería analizar que elementos tienen inverso, y en el conjunto de las matrices cuadradas hay infinitas matrices que tienen inverso e infinitas matrices que no lo tienen, y se verá más adelante, como identificarlas, y como calcular la inversa.

## 5.- Matrices traspuestas

Dada una matriz A, su traspuesta ( $A^t$ ) es la que se obtiene al cambiar filas por columnas en el

mismo orden. Ejemplo:  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$        $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

### 5.1.- Propiedades de la traspuesta

- |                            |                                    |
|----------------------------|------------------------------------|
| a) $I_n^t = I_n$           | d) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ |
| b) $(A^t)^t = A$           | e) $rg(A^t) = rg(A)$               |
| c) $(A + B)^t = A^t + B^t$ | f) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$       |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

### EJERCICIOS PROPUESTOS

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <p>Dadas las matrices <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; -1 &amp; 1 \\ -3 &amp; 2 &amp; -1 \\ -2 &amp; -2 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 4 &amp; 6 \\ 1 &amp; 2 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>, calcular:</p> <p>a) <math>A - B</math><br/> b) <math>2A - 3B</math><br/> c) <math>(A - B)^t</math><br/> d) <math>A \cdot B</math><br/> e) <math>B \cdot A</math><br/> f) <math>A^t</math><br/> g) <math>A^t \cdot B</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 2 | <p>Dadas las matrices <math>A = \begin{pmatrix} 3 &amp; -1 \\ 4 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} -1 &amp; 4 \\ 5 &amp; -2 \end{pmatrix}</math>, calcula:</p> <p>a) <math>3A - 2B</math><br/> b) <math>2A + 5B</math><br/> c) <math>A^2 - 2B</math><br/> d) <math>A^2 + 5B</math><br/> e) <math>2A - B^2</math><br/> f) <math>3A + B^2</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3 | <p>Calcular:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; -1 &amp; 2 \\ 2 &amp; 0 &amp; 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 &amp; 3 &amp; 1 \\ 1 &amp; 9 &amp; 7 \\ -1 &amp; 0 &amp; 2 \end{pmatrix} =</math><br/> b) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; -1 &amp; 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} =</math><br/> c) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 1 \\ 5 &amp; 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 &amp; -1 \\ -5 &amp; 3 \end{pmatrix} =</math><br/> d) <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; 3 &amp; 1 \\ 5 &amp; 7 &amp; 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; b &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; c \end{pmatrix} =</math><br/> e) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 &amp; -2 \\ 5 &amp; -7 \\ 9 &amp; 7 \end{pmatrix} =</math></p> |
| 4 | <p>Encontrar <b>a</b>, <b>b</b>, <b>c</b>, <b>d</b> sabiendo que:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 &amp; -5 \\ -1 &amp; 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; -1 \\ 2 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 5 | <p>Dadas <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> <math>B = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -2 \\ 3 &amp; 1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>C = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 2 &amp; 1 \\ 5 &amp; 8 \end{pmatrix}</math> <math>D = \begin{pmatrix} 3 &amp; -1 &amp; 2 \\ 1 &amp; 0 &amp; 5 \end{pmatrix}</math></p> <p>comprobar que:</p> <p>a) <math>A \cdot (B - D) = A \cdot B - A \cdot D</math></p> <p>b) <math>A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C</math></p> <p>c) <math>(C \cdot D)^t = D^t \cdot C^t</math></p> <p>y calcula</p> <p>d) <math>A^t \cdot B</math></p> <p>e) <math>(B - 2D)^t</math></p> |

### SOLUCIONES:

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | <p>a) <math>A - B = \begin{pmatrix} 0 &amp; -3 &amp; -2 \\ -5 &amp; -2 &amp; -7 \\ -3 &amp; -4 &amp; -3 \end{pmatrix}</math></p> <p>b) <math>2A - 3B = \begin{pmatrix} -1 &amp; -8 &amp; -7 \\ -12 &amp; -8 &amp; -20 \\ -7 &amp; -10 &amp; -9 \end{pmatrix}</math></p> <p>c) <math>(A - B)^t = \begin{pmatrix} 0 &amp; -5 &amp; -3 \\ -3 &amp; -2 &amp; -4 \\ -2 &amp; -7 &amp; -3 \end{pmatrix}</math></p> <p>d) <math>AB = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ -6 &amp; -12 &amp; -18 \end{pmatrix}</math></p> <p>e) <math>BA = \begin{pmatrix} -11 &amp; -3 &amp; -1 \\ -22 &amp; -6 &amp; -2 \\ -11 &amp; -3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math></p> <p>f) <math>A^t = \begin{pmatrix} 1 &amp; -3 &amp; -2 \\ -1 &amp; 2 &amp; -2 \\ 1 &amp; -1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p> <p>g) <math>A^t B = \begin{pmatrix} -7 &amp; -14 &amp; -21 \\ 1 &amp; 2 &amp; 3 \\ -1 &amp; -2 &amp; -3 \end{pmatrix}</math></p> |
| 2 | <p>a) <math>\begin{pmatrix} 11 &amp; -11 \\ 2 &amp; 10 \end{pmatrix}</math></p> <p>b) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 18 \\ 33 &amp; -6 \end{pmatrix}</math></p> <p>c) <math>\begin{pmatrix} 7 &amp; -13 \\ 10 &amp; 4 \end{pmatrix}</math></p> <p>d) <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 15 \\ 45 &amp; -10 \end{pmatrix}</math></p> <p>e) <math>\begin{pmatrix} -15 &amp; 10 \\ 23 &amp; -20 \end{pmatrix}</math></p> <p>f) <math>\begin{pmatrix} 30 &amp; -15 \\ -3 &amp; 30 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 3 | <p>a) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; -6 &amp; -2 \\ 0 &amp; 6 &amp; 10 \end{pmatrix}</math></p> <p>b) -23</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|
|------------------------|-------------------|---------------|

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | $c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $d) \begin{pmatrix} 2a & 3b & c \\ 5a & 7b & 4c \end{pmatrix}$ $e) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$                                                                                                                                           |
| 4 | <p>a) <math>a = 1, b = 2, c = 4, d = 10</math></p> <p>b) <math>a = 3, b = 0, c = 1, d = 2</math></p>                                                                                                                                                                                                                    |
| 5 | $a) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ $b) \begin{pmatrix} -14 & -17 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $c) \begin{pmatrix} 3 & 7 & 23 \\ -1 & -2 & -5 \\ 2 & 9 & 50 \end{pmatrix}$ $d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $e) \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$ |

## 6.- Determinante de una matriz cuadrada

Es un número asociado a toda matriz cuadrada, y, que en el caso de las de  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$  se calcula de las siguientes maneras.

Sea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  su determinante que se expresa

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

En el caso de que sea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  se calcula como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Obsérvese que en este caso los productos positivos están formados por los coeficientes de la diagonal principal y sus dos “paralelas” multiplicadas por el coeficiente que está en el extremo opuesta. Análogo para la secundaria y sus “paralelas”, pero en este caso, en negativo. Este método es conocido como la “**Regla de Sarrus**”

Ejemplos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 5(-4) - 6(-2) = -20 + 12 = -8$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 3(-3)6 + (-2)1(-4) + 4 \cdot 2 \cdot 5 - 5(-3)(-4) - (-2)4 \cdot 6 - 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= -54 + 8 + 40 - 60 + 48 - 6 = -24.$$

## 7.- Menor complementario y adjunto de un elemento

Dado un elemento cualquiera de una matriz, su menor complementario es el valor del determinante que resulta al suprimir la fila y la columna en la que se encuentra dicho elemento. Obsérvese que el menor complementario no depende del elemento sino del lugar que ocupa

Ejemplo: Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ . Supongamos que queremos calcular el menor complementario de cada elemento. Se representa por  $M_{ij}$  siendo  $ij$  el lugar que ocupa en la matriz.

$$\text{Así } M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 42 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 28 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -14$$

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 12 \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -17 \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -9 \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Dado un elemento cualquiera de una matriz, su adjunto es el valor del determinante que resulta al suprimir la fila y la columna en la que se encuentra dicho coeficiente (es decir, su menor complementario), **multiplicado por 1 o -1 dependiendo de si la suma de los subíndices i + j correspondientes al lugar que ocupa el coeficiente es par o impar. Se representan por  $A_{ij}$**

Así en el ejemplo anterior

$$A_{11} = 42 \quad A_{12} = -28 \quad A_{13} = -14$$

$$A_{21} = -12 \quad A_{22} = 8 \quad A_{23} = -18$$

$$A_{31} = -17 \quad A_{32} = 9 \quad \text{y} \quad A_{33} = -1$$

**8.- Matriz adjunta.** Es aquella que tiene por elementos los adjuntos de todos los coeficientes de la matriz dada.

En el caso anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \text{ su adjunta que se representa como } Ad(A) = \begin{pmatrix} 42 & -28 & -14 \\ -12 & 8 & -18 \\ -17 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

### 9.- Desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea (fila o columna)

El determinante de una matriz se puede calcular multiplicando los coeficientes de una fila cualquiera (o columna) por los adjuntos de los coeficientes de dicha fila.

$$|A| = a_{11} \cdot |A_{11}| + a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}|$$

Ejemplo: Queremos calcular el determinante de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -7 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$  que sabemos que por Sarrus vale  $|A| = 6$ .

Veamos cómo sería por adjuntos, elegimos la segunda columna. Ahora calculamos

$$|A| = -3 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{22} + (-1) \cdot A_{32}$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} (-1) + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} (-1) =$$

$$= (-3) \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \cdot (-1) = 6 + 4 - 4 = 6$$

que coincide con el determinante original

**10.- Propiedades de los determinantes**

- 1.- Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los elementos 0, el determinante vale 0.
- 2.- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante vale 0.
- 3.- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas proporcionales, el determinante vale 0.
- 4.- El determinante de una matriz cuadrada y el de su traspuesta es el mismo.
- 5.- Si se intercambian dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo.
- 6.- Si multiplicamos los elementos de una línea por un número, el determinante también queda multiplicado por el mismo número  
 Ejemplo: Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ .  
 Su determinante vale  $|A| = 32$ .  
 Ahora multiplicamos la segunda columna (por ejemplo) por 3.  
 Nos quedaría la matriz  $B = \begin{pmatrix} 5 & 18 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$ .  
 Su determinante sería  $|B| = 96$  que sería  $32 \cdot 3$
- 7.- El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de dichas matrices, es decir  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- 8.- Un determinante no varía si le sumamos a una línea otra o más líneas paralelas multiplicadas por números cualesquiera.  
 Esta propiedad es importante para calcular determinantes de matrices de órdenes superiores a 3 ya que podemos conseguir que una de las líneas tenga todos sus elementos igual a 0 excepto uno y al calcular el determinante por adjuntos, el problema quedaría bastante reducido.

Ejemplo: Calcular este determinante  $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ . Elegimos una línea que

tenga un 1 ó -1.

Por ejemplo, la segunda fila. Según esta propiedad, el valor no cambia si multiplicamos la tercera columna por -3 y se la sumamos a la primera.

Después repetiremos el proceso multiplicando la tercera columna por 2 y se la sumaremos a la segunda

Por último, multiplicaremos la tercera columna por -2 y se la sumaremos a la cuarta. Obtendremos este

$$\text{determinante: } \begin{vmatrix} 8 & -1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

De esta forma hemos conseguido que la segunda fila tenga todos los elementos 0 excepto el 1.

Ahora desarrollamos el determinante por los adjuntos de la segunda fila y al multiplicar cada adjunto por 0 nos dará 0, quedándonos

$$|A| = 1 \cdot A_{23} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot (-1) = -286$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

## SOLUCIONES:

$$\text{a) } 1 \quad \text{b) } -1 \quad \text{c) } -1 \quad \text{d) } -1 \quad \text{e) } 11 \quad \text{f) } -9 \quad \text{g) } -29 \quad \text{h) } -286$$

**11.- Rango de una matriz.**

**Definición:** El rango de una matriz cualquiera es el rango de las filas o columnas ( es el mismo) considerando éstas **como vectores de  $R^n$ , es decir es el número de filas o columnas linealmente independientes**. Una consecuencia de esta definición, es que el rango no se modifica si se permutan entre sí dos líneas paralelas

**Definición alternativa:** Dada una matriz cualquiera (no tiene porqué ser cuadrada), su rango es la dimensión (número de filas o columnas) que tiene la mayor submatriz cuadrada que se puede extraer de la dada con determinante distinto de 0.

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

Calcular el rango de las matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$i) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

**SOLUCIONES:**

a) 2; b) 3; c) 3;  
d) 3; e) 3; f) 2;  
g) 3; h) 3; i) 2

**12.- Matriz inversa.**

Dada una matriz A **cuadrada**, su inversa es otra matriz  $A^{-1}$  que cumple que:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$  (matriz identidad). No todas las matrices tienen matriz inversa

**13.- Teorema.** La condición necesaria y suficiente para que una matriz A tenga inversa es que su determinante sea distinto de 0

**14.- Cálculo de la inversa.**

La matriz inversa por determinantes se calcula mediante el siguiente proceso:

- Se calcula el determinante de A (ha de ser distinto de 0)
- Se calcula la matriz traspuesta de la A
- Se calcula la matriz adjunta de la traspuesta
- Por último la matriz inversa  $A^{-1}$  se obtiene multiplicando la matriz adjunta anterior por el inverso del determinante. Es decir,  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ad(A^t)$

**Ejemplo 1:**

Calcular la matriz inversa de la  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a)  $|A| = 10 \neq 0$  con lo cual tiene inversa

b)  $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c)  $Ad(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

d)  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Ad(A^t) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

Se puede comprobar de forma muy rápida que si es la inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 2:**

Calcular la matriz inversa de la  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

a)  $|A| = -2 \neq 0$

b)  $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c)  $Ad(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

d)  $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

### 15.- Propiedades de la matriz inversa

a)  $(A^{-1})^{-1} = A$     b)  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$     c)  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$     d)  $I_n^{-1} = I_n$

e)  $A$  (de orden  $n$ ) es invertible  $\Leftrightarrow \text{rang} A = n \Leftrightarrow |A| \neq 0$

### EJERCICIOS PROPUESTOS:

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Calcular la matriz inversa, cuando se pueda de las matrices:<br><br>a) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ |
| 2 | Halla los valores de $\lambda$ para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa                                                                                                                                                                                         |
| 3 | Halla los valores de "m" para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ no tiene inversa                                                                                                                                                                                                          |

### SOLUCIONES:

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$<br><br>c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ |
| 2 | $\lambda = 0$ y $\lambda = 7$                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 3 | $m = 3$ y $m = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                    |

**15.- Transformaciones elementales de una matriz**

**Definición:** Se llaman **transformaciones elementales** de una matriz a alguna de los tres tipos siguientes:

- a) Tipo I: consiste en **permutar entre sí dos filas**
- b) Tipo II: consiste en **multiplicar una fila por un número no nulo**
- c) Tipo III: consiste en **sumar a una fila, otra multiplicada por un número no nulo**

**Definición:** Dos matrices son **equivalentes** si se puede pasar de una a otra con transformaciones elementales, esta relación entre matrices es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le aplicamos una transformación elemental del tipo I que consiste en permutar las dos primeras filas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} F_1 \longleftrightarrow F_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Le aplicamos una del tipo II consistente en multiplicar la 3ª fila por  $-2$ .

$$\text{y quedaría } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow -2F_3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & -14 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3:

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  Le aplicamos una del tipo III que es sumar a la 2ª

fila, la 5ª multiplicada por 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow F2 + 2 \cdot F5 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 11 & 11 \\ 3 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

## 16.- Matrices elementales

Son las matrices que se obtienen al aplicar las transformaciones anteriores a la matriz unidad.

Ejemplo 1

Sea la matriz unidad de orden 3  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Si le aplicamos una transformación del tipo I y permutamos por ejemplo las filas 2ª y 3ª obtenemos **la matriz elemental**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Si le aplicamos una transformación del tipo II y multiplicamos por ejemplo la fila 3ª por -2, obtenemos **la matriz elemental**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Si le aplicamos una transformación del tipo III y sumamos a la primera fila la segunda multiplicada por 3 obtenemos **la matriz elemental**  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | <p> <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> y el rango sería 1 y sería falsa. La c) es falsa ya que para esta matriz, por ejemplo: <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> el rango sería 2. La d) es falsa ya que para esta matriz por ejemplo <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> el rango sería 2. </p> <p> La respuesta es la b) ya que al no ser a igual a 0, las dos columnas son distintas de <math>\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}</math> y nunca son proporcionales. </p> |
| 5 | <p>5.- Sea A una matriz. Para que el producto <math>A^2 = A \cdot A</math> esté definido, es necesario y suficiente que:</p> <p> a) A sea cuadrada y de orden 2                      b) A sea cuadrada<br/> c) <math>A \cdot A^t</math> esté definida                      d) A sea invertible </p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|   | <p><u>Solución:</u> Si una matriz es cuadrada de orden nxn, el producto <math>A \cdot A</math> siempre está definido. Es la b)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 6 | <p>El rango de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; 2 &amp; 0 &amp; -1 \\ 3 &amp; 4 &amp; 1 &amp; 2 \\ 2 &amp; 3 &amp; 2 &amp; 5 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) 1    b) 2    c) 3    d) 4</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|   | <p><u>Solución:</u> Como las columnas son vectores de <math>\mathbb{R}^3</math> el rango como máximo es 3, lo que descarta la d).</p> <p>Las dos primeras columnas son L.I. por no ser proporcionales. Veamos juntando la tercera calculando el determinante:</p> $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$ <p>Luego las tres primeras son L.I. y el rango es 3 que es la respuesta c)</p>                                                                                                                                                                                      |
| 7 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> es:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> $ A  = -1 \quad ; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$ $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ que es la b)}$ <p>Como se cumple que <math>A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I</math>, se puede hacer probando a multiplicarlas hasta obtener la matriz unidad <math>I = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p> |
| 8  | <p>La matriz real <math>B = \begin{pmatrix} a &amp; -1 \\ 0 &amp; 1-b \end{pmatrix}</math> es invertible si:</p> <p>a) <math>a \neq -1</math> y <math>b \neq 0</math>      b) <math>a = 0</math>      c) <math>a \neq 0</math> y <math>b \neq 1</math>      d) <math>b = 1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|    | <p><u>Solución:</u> Para que tenga inversa, su determinante ha de ser distinto de 0. Lo calculamos:</p> $\begin{vmatrix} a & -1 \\ 0 & 1-b \end{vmatrix} = a(1-b).$ <p>La respuesta que lo hace distinto de 0 es la c)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 9  | <p>Dadas las matrices <math>A = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>    <math>B = \begin{pmatrix} 2 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> y <math>C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}</math>, la traspuesta de la matriz <math>3A - 3B - 2C^t</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -4 &amp; -3 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}</math>    d) <math>\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                             |
|    | <p><u>Solución:</u><br/>Calculamos: <math>3A - 3B - 2C^t = 3\begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 &amp; 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 &amp; 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 &amp; -7 \end{pmatrix}</math> y su traspuesta es la b)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 10 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} -1 &amp; 2 \\ -2 &amp; 3 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; -2 \\ 2 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; -2 \\ 2 &amp; -2 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; -2 \\ 2 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>    d) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 1 &amp; 1 \\ 3 &amp; 3 &amp; 3 \\ 2 &amp; 1 &amp; -2 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                      |
|    | <p><u>Solución:</u><br/><math> A  = 1</math>    ;    <math>A^t = \begin{pmatrix} -1 &amp; -2 \\ 2 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>    ;    <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} 3 &amp; -2 \\ 2 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>    ;    <math>A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 &amp; -2 \\ 2 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> que es la a)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11 | <p>Las matrices reales <math>A = \begin{pmatrix} 0 &amp; \mu \\ \mu &amp; 0 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; \lambda \end{pmatrix}</math> conmutan si.</p> <p>a) <math>\lambda = 1</math>    b) <math>\mu = 1</math>    o    <math>\lambda = 1</math>    c) <math>\lambda = 0</math>    d) <math>\lambda \cdot \mu = 0</math></p>                                                                                                                                                                                       |
|    | <p><u>Solución:</u><br/>Para que <math>A \cdot B = B \cdot A</math> se ha de cumplir que:</p> $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ <p>Al multiplicar nos queda: <math>\begin{pmatrix} \mu &amp; \lambda\mu \\ \mu &amp; \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu &amp; \mu \\ \lambda\mu &amp; \mu \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Se cumple si <math>\lambda = 1</math> que es la a)</p> |
| 12 | <p>Sea a un número real y consideremos la matriz real siguiente <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ -1 &amp; -1 &amp; a \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Si <math>a \neq -1</math> y r es el rango de la matriz A, entonces necesariamente se verifica:</p> <p>a) <math>r = 2</math>    b) <math>r = 3</math>    c) <math>r = 1</math>    d) Ninguna de las anteriores</p>                                                                                                                                                      |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos el determinante <math>\begin{vmatrix} 1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ -1 &amp; -1 &amp; a \end{vmatrix} = a - 1</math>.</p> <p>Entonces sabemos por hipótesis que <math>a \neq -1</math>. Pero para <math>a = 1</math> el rango es 2.</p> <p>Para los demás casos es 3. La respuesta es la d)</p>                                                                                                                                                                                                                  |
| 13 | <p>Dadas las matrices reales <math>A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}</math>; <math>B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}</math> y <math>C = (-1 \quad -1 \quad 2)</math>. La traspuesta de la matriz <math>2A - 2B - 3C^t</math> es:</p> <p>a) <math>(1 \quad 7 \quad -4)</math>    b) <math>(1 \quad 9 \quad -4)</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}</math>    d) <math>(-1 \quad 7 \quad -4)</math></p>                                                                                                  |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos: <math>2A - 2B - 3C^t = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}</math></p> <p>y su traspuesta es <math>(1 \quad 7 \quad -4)</math> que es la respuesta a)</p>                                                                                                                                                                                                               |
| 14 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 \\ -2 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> es:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                       |
|    | <u>Solución:</u> $ A  = 1$ ; $A^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; $\text{Ad}(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ; $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$<br>que es la a)                                                                                                                                                                                    |
| 15 | Dada una matriz A cualquiera, determinar cuál de las siguientes opciones es falsa:<br><br>a) El producto $A \cdot A^t$ está definido cualquiera que sea el orden de A<br><br>b) El producto $A(A^t A)$ está definido cualquiera que sea el orden de A<br><br>c) El producto $A(A^t A)^t$ está definido cualquiera que sea el orden de A<br><br>d) Para que el producto $A \cdot A^t$ esté definido es necesario que a sea cuadrada |
|    | <u>Solución:</u> Es falsa la d). Por ejemplo, si A es una matriz de 3x2, su traspuesta es de 2x3 y en cambio<br><br>se pueden multiplicar                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 16 | La matriz real $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ b & 2 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible si:<br><br>a) $a = 1$ y $b = 1$ b) $a = -1$ y $b = 5$ c) $a = 1$ y $b = 5$ d) $a = 2$ y $b = 2$                                                                                                                                                                                                                              |
|    | <u>Solución:</u> Una matriz es invertible si su determinante no es 0.<br><br>Lo calculamos: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ b & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2ab - 6a + 4$ . La solución que no lo hace 0 es la c)                                                                                                                                                                                                            |
| 17 | Sean las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ .<br><br>Se tiene que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si:<br><br>a) $a = 1$ y $b = 0$ b) Para cualquier valor de a y b<br><br>c) $a = 0$ y $b = 3$ d) $a = 3$ y $b = 18$                                                                                                                            |
|    | <u>Solución:</u> $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & a + b \end{pmatrix}$ ;<br><br>$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & a + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 4 + a + b & (a + b)^2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                               |

| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Javier Burgos |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
|                        | $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2a & 2ab \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 2a+1+b & a^2+2ab+b^2 \end{pmatrix}$ <p>que se cumple sólo si <math>a = 3</math> y <math>b = 18</math> que es la d)</p>                                                                                                                                                                                                            |               |
| 18                     | <p>Dadas las matrices reales</p> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$ <p>la traspuesta de la matriz <math>D = A \cdot B \cdot C</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 3 &amp; 3 \\ 8 &amp; 5 &amp; 7 \\ 2 &amp; 6 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 9 &amp; 2 \\ 3 &amp; 7 &amp; 6 \\ 3 &amp; 7 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 8 &amp; 2 \\ 3 &amp; 5 &amp; 6 \\ 3 &amp; 7 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    d) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 3 &amp; 3 \\ 9 &amp; 7 &amp; 7 \\ 2 &amp; 6 &amp; 2 \end{pmatrix}</math></p> |               |
|                        | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>D = \begin{pmatrix} 2 &amp; 1 &amp; -2 &amp; 3 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 &amp; -1 &amp; 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &amp; -2 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 4 &amp; 0 &amp; 1 \\ 3 &amp; 0 &amp; 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 2 \\ 0 &amp; 3 &amp; 2 \end{pmatrix} =</math></p> $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ <p>y su traspuesta es: <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; 3 &amp; 3 \\ 9 &amp; 7 &amp; 7 \\ 2 &amp; 6 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> que es la d)</p>                                                                                 |               |
| 19                     | <p>19.- Sea la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 0 &amp; -1 \\ -1 &amp; a &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; -3 &amp; 3 \end{pmatrix}</math> donde <math>a</math> es un parámetro real. Su rango es:</p> <p>a) 3 para cualquier <math>a</math>    b) 2 si y sólo si <math>a = 0</math>    c) 3 si <math>a = 0</math>    d) 4 si <math>a = -2</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |               |
|                        | <p><u>Solución:</u><br/>La respuesta d) no es posible al ser como máximo de rango 3, al tener tres filas.</p> <p>Al no ser proporcionales, la primera y la tercera son L.I. y el rango de momento es 2.</p> <p>Veamos si la cuarta columna depende de éstas.</p> <p>Calculamos: <math>\begin{vmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ -1 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; -3 &amp; 3 \end{vmatrix} = 0</math>. De momento sigue siendo 2. Ahora discutimos el rango según la segunda columna.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |               |



|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) A no es invertible                                                                                                                                                                                                        |
|    | <u>Solución:</u> Calculamos $ A  = -2$ $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; $\text{Ad}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y<br>por último $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ que es la a)                                                                                                                                 |
| 24 | Sean las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Se verifica:<br><br>a) $B \cdot A^t = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 3 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$<br>c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ |
|    | <u>Solución:</u> El producto $B \cdot A$ no se puede realizar.<br><br>Calculamos $B \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ que es la a)                                                                                                                                                                                                    |
| 25 | La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$ es invertible si:<br><br>a) $ab = 2$ b) $a = -1$ y $b = -2$ c) $a = 0$ d) $a = 2$ y $b = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|    | <u>Solución:</u> Para que sea invertible, su determinante ha de ser distinto de 0.<br><br>Como vale $ A  = 2 - ab$ , sólo se cumple en el caso en que $a = 0$ que es la c)                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 26 | Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Se verifica:<br><br>a) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$<br>c) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ d) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$                                                              |
|    | <u>Solución:</u> Si multiplicamos $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ que es la b)                                                                                                                                                                                                                               |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 27 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 2 &amp; 1 &amp; 2 \\ -3 &amp; -1 &amp; -2 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ -1 &amp; -1 &amp; -1 \\ \frac{1}{2} &amp; -1 &amp; -\frac{1}{2} \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; -1 &amp; \frac{1}{2} \\ 0 &amp; -1 &amp; 1 \\ 0 &amp; -1 &amp; \frac{1}{2} \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ \frac{1}{2} &amp; 1 &amp; \frac{1}{2} \end{pmatrix}</math>    d) A no es invertible</p>                         |
|    | <p><u>Solución:</u> Como el determinante de la matriz A es 0, no es invertible.</p> $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0. \text{ Es la d)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 28 | <p>Calcular la inversa de la matriz real <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; -1 \\ 3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math></p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 1 \\ -3 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ -3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ -3 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    d) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 1 \\ 3 &amp; -2 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                                                  |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos: <math> A  = 1</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} 2 &amp; 3 \\ -1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> ; <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 \\ -3 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> ; <math>A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 \\ -3 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> que es la a)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 29 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ 0 &amp; 2 &amp; -3 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 1 &amp; 2 \\ -3 &amp; 2 &amp; 3 \\ -2 &amp; 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ 0 &amp; 2 &amp; -1 \\ -1 &amp; -3 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>    d) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 1 &amp; 2 \\ 3 &amp; 2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math></p> |
|    | <p><u>Solución:</u> <math> A  = 1</math>    <math>A^t = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 2 &amp; -1 \\ -1 &amp; -3 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>    <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 &amp; 2 \\ -3 &amp; 2 &amp; 3 \\ -2 &amp; 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> ;</p> <p><math>A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ -2 &amp; -3 &amp; 4 \\ -1 &amp; -1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> que es la a)</p>                                                                                                                                                                                |
| 30 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; -1 &amp; 3 \\ 0 &amp; -1 &amp; 2 \\ 1 &amp; -1 &amp; 3 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; 0 &amp; 1 \\ -1 &amp; -1 &amp; -1 \\ 3 &amp; 2 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ -2 &amp; -3 &amp; 4 \\ -1 &amp; -1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ 2 &amp; -3 &amp; 4 \\ -1 &amp; -1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    d) Ninguna de ellas</p>                                                                                   |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | <p><u>Solución:</u> <math> A  = -1</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} 2 &amp; 0 &amp; 1 \\ -1 &amp; -1 &amp; -1 \\ 3 &amp; 2 &amp; 3 \end{pmatrix}</math> ; <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 2 &amp; 3 &amp; -4 \\ 1 &amp; 1 &amp; -2 \end{pmatrix}</math> ;</p> <p><math>A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ -2 &amp; -3 &amp; 4 \\ -1 &amp; -1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> que es la b)</p>                                                                                                                                                                                          |
| 31 | <p>La matriz real <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; a \\ b &amp; 1 \end{pmatrix}</math> donde a y b son parámetros reales, es invertible si:</p> <p>a) <math>ab = 1</math>      b) <math>a = 4</math> y <math>b = 0</math>      c) <math>a = 1</math> y <math>b = 1</math>      d) <math>a = -1</math> y <math>b = -1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|    | <p><u>Solución:</u> Para que la matriz sea invertible, su determinante ha de ser distinto de 0.</p> <p>Esto ocurre si <math>a = 4</math> y <math>b = 0</math> que es la b). En los otros casos da 0</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 32 | <p>Se consideran las matrices reales <math>A = \begin{pmatrix} -1 &amp; 2 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>. La matriz C que verifica <math>AC = B</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; -3 \\ -\frac{1}{2} &amp; -1 \end{pmatrix}</math>      b) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; \frac{1}{2} \\ -3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>      c) <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; -1 \\ \frac{1}{2} &amp; \frac{1}{2} \end{pmatrix}</math>      d) <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; \frac{1}{2} \\ -1 &amp; \frac{1}{2} \end{pmatrix}</math></p> |
|    | <p><u>Solución:</u> Se puede ir probando con las soluciones hasta comprobar que :</p> <p><math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 2 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 &amp; -3 \\ -\frac{1}{2} &amp; -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 3 \end{pmatrix}</math> que es la a).</p> <p>También puede hacerse despejando la C de la igualdad <math>AC = B \Rightarrow C = A^{-1} \cdot B</math>. De aquí se calcula la inversa de la A y se multiplica por la B obteniendo la matriz del apartado a)</p>                                                                                              |
| 33 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -3 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -3 &amp; -2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 1 &amp; -1 \\ -1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>      b) <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; -3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>      c) <math>\begin{pmatrix} -3 &amp; -3 &amp; 3 \\ 2 &amp; -1 &amp; -1 \\ -1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>      d) Ninguna de ellas</p>                                                                                      |
| 34 | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> <p><math> A  = 1</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> ; <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -2 &amp; -3 &amp; 3 \\ 1 &amp; 2 &amp; -1 \\ -1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> ;</p> <p><math>A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 &amp; -3 &amp; 3 \\ 1 &amp; 2 &amp; -1 \\ -1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> que es la d)</p>                                                                                                                                        |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 &amp; -3 \\ 1 &amp; 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -3 &amp; -2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 1 &amp; -1 \\ -1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> b) <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; -3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> c) <math>\begin{pmatrix} -3 &amp; -2 &amp; 3 \\ 2 &amp; -1 &amp; -1 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> d) A no es invertible</p>                                                                                           |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> <p><math> A  = -1</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; -3 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> ; <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 &amp; -3 \\ -2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> ;</p> <p><math>A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 &amp; 2 &amp; -3 \\ -2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 &amp; -2 &amp; 3 \\ 2 &amp; 1 &amp; -1 \\ -1 &amp; -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> que es la a)</p>                             |
| 35 | <p>La matriz <math>A = \begin{pmatrix} -1 &amp; a &amp; 2 \\ 0 &amp; 1 &amp; a \\ 1 &amp; -1 &amp; -2 \end{pmatrix}</math> donde a es un parámetro real, NO es invertible si:</p> <p>a) <math>a = 1</math> o <math>a = 0</math> b) <math>a = 2</math> o <math>a = -1</math> c) <math>a = 2</math> d) <math>a = -1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|    | <p><u>Solución:</u> Para que no sea invertible, el determinante ha de ser 0.</p> <p>Lo calculamos: <math>\begin{vmatrix} -1 &amp; a &amp; 2 \\ 0 &amp; 1 &amp; a \\ 1 &amp; -1 &amp; -2 \end{vmatrix} = a^2 - a</math> que se anula para <math>a = 1</math> o <math>a = 0</math> que es la a)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 36 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} -2 &amp; -1 &amp; 0 \\ 2 &amp; 2 &amp; 1 \\ 2 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} &amp; -\frac{1}{2} &amp; \frac{1}{2} \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> b) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; -1 &amp; 2 \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> c) <math>\begin{pmatrix} -2 &amp; 2 &amp; 2 \\ -1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> d) No es invertible</p>                                                                   |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> <p><math> A  = -2</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} -2 &amp; 2 &amp; 2 \\ -1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> ; <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; -2 &amp; 2 \\ -2 &amp; 0 &amp; -2 \end{pmatrix}</math> ;</p> <p><math>A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; -2 &amp; 2 \\ -2 &amp; 0 &amp; -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} &amp; -\frac{1}{2} &amp; \frac{1}{2} \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> que es la a)</p> |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 37 | <p>Sean las matrices <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 2 &amp; 3 \\ 3 &amp; 1 &amp; -1 &amp; 0 \\ -2 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} -1 &amp; 2 &amp; -1 \\ 3 &amp; 0 &amp; 1 \\ 2 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>. Se verifica:</p> <p>a) <math>AB = \begin{pmatrix} 4 &amp; 0 &amp; 0 \\ 3 &amp; 0 &amp; 1 \\ -5 &amp; 4 &amp; -3 \\ 1 &amp; 7 &amp; -2 \end{pmatrix}</math>      b) <math>BA = \begin{pmatrix} 4 &amp; 3 &amp; -5 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 4 &amp; 7 \\ 0 &amp; 0 &amp; -3 &amp; -2 \end{pmatrix}</math></p> <p>c) <math>BA = \begin{pmatrix} 7 &amp; 2 &amp; -4 &amp; -4 \\ 1 &amp; 0 &amp; 6 &amp; 10 \\ 3 &amp; 1 &amp; 3 &amp; 7 \end{pmatrix}</math>      d) BA no está definido</p> |
|    | <p><u>Solución:</u> El producto AB no está definido pero el BA sí lo está. El resultado es:</p> $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ que es la c)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 38 | <p>Sean las matrices <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 0 \\ 3 &amp; -1 &amp; 1 \\ -2 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> <math>B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}</math> y <math>C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}</math>. Se verifica:</p> <p>a) <math>AB + C = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}</math>      b) <math>AB + C = (3 \quad -5 \quad 6)</math></p> <p>c) <math>A(B + C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}</math>      d) <math>A(B + C) = (3 \quad -5 \quad 6)</math></p>                                                                                                                                                                                                                        |
|    | <p><u>Solución:</u> Probando comprobamos que:</p> $AB + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ que es la a)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 39 | <p>Para que las matrices <math>A = \begin{pmatrix} a &amp; b \\ 3 &amp; -2 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} b &amp; 0 \\ a &amp; -1 \end{pmatrix}</math> donde a y b son parámetros reales conmuten es necesario que:</p> <p>a) <math>ab = 0</math>      b) <math>a = 0</math>      c) <math>b = 0</math>      d) Ninguna de las anteriores</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|    | <p><u>Solución:</u> Si <math>AB = BA</math> se ha de cumplir que <math>\begin{pmatrix} 2ab &amp; -b \\ 3b - 2a &amp; 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab &amp; b^2 \\ a^2 - 3 &amp; ab + 2 \end{pmatrix}</math></p> <p>Si probamos las tres primeras vemos que no se cumple la igualdad en ningún caso.</p> <p>La respuesta es la d)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 40 | <p>40.- La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; 2 &amp; 0 \\ 1 &amp; 1 &amp; 2 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; 1 &amp; 0 \\ 2 &amp; 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 2 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} \frac{1}{4} &amp; \frac{1}{2} &amp; -1 \\ \frac{1}{4} &amp; -\frac{1}{2} &amp; 1 \\ -\frac{1}{4} &amp; \frac{1}{2} &amp; 0 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} \frac{3}{4} &amp; -\frac{1}{2} &amp; -1 \\ -\frac{1}{4} &amp; \frac{1}{2} &amp; 1 \\ -\frac{1}{4} &amp; \frac{1}{2} &amp; 0 \end{pmatrix}</math>    d) la matriz no es invertible</p>                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> <p><math> A  = -2</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> ; <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; -1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>;</p> <p><math>A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; -1 &amp; -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; \frac{1}{2} &amp; -\frac{1}{2} \\ 0 &amp; -\frac{1}{2} &amp; \frac{1}{2} \\ 0 &amp; \frac{1}{2} &amp; \frac{1}{2} \end{pmatrix}</math> que es la c)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 41 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} &amp; 0 &amp; -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} &amp; 1 &amp; -\frac{1}{2} \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -1 &amp; 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; -1 &amp; 1 \\ 3 &amp; 0 &amp; -0 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 0 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 \\ 3 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 0 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 \\ 3 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>    d) La matriz no es invertible</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos la inversa</p> <p><math> A  = \frac{1}{6}</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} 0 &amp; \frac{1}{2} &amp; \frac{1}{2} \\ 0 &amp; 0 &amp; 1 \\ \frac{1}{3} &amp; -\frac{1}{6} &amp; -\frac{1}{2} \end{pmatrix}</math> ; <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} &amp; \frac{1}{3} &amp; 0 \\ \frac{1}{6} &amp; -\frac{1}{6} &amp; \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> ;</p> <p><math>A^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} &amp; \frac{1}{3} &amp; 0 \\ \frac{1}{6} &amp; -\frac{1}{6} &amp; \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} &amp; \frac{1}{3} &amp; 0 \\ \frac{1}{6} &amp; -\frac{1}{6} &amp; \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 0 \\ 1 &amp; -1 &amp; 1 \\ 3 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> que es la c)</p> |
| 42 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 2 &amp; 2 \\ 1 &amp; 1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> es:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |



|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                              |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> $ A  = -2 \quad ; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} ;$ $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ que es la c)}$                                                                                                                                                                     |
| 46 | <p>Considere las matrices <math>A = \begin{pmatrix} 3 &amp; 6 &amp; 2 \\ 3 &amp; 2 &amp; 2 \\ 1 &amp; 1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}</math>. El producto <math>A^{-1} \cdot B</math> es:</p> a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ d) Ninguna de las anteriores                                                                                                                                                                                                 |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> $ A  = 8 \quad ; \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -12 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{1}{8}$ $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -12 \end{pmatrix}$ <p>El producto <math>\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 &amp; 2 &amp; 8 \\ 2 &amp; -2 &amp; 0 \\ 1 &amp; 3 &amp; -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}</math> que es la a)</p> |
| 47 | <p>Considere las matrices <math>A = \begin{pmatrix} 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ -1 &amp; 2 &amp; 2 \\ 1 &amp; 1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math> y <math>B = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}</math>. El producto <math>A^{-1} \cdot B</math> es:</p> a) $\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ -12 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                        |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math>A^{-1}</math>:</p> $ A  = -1 \quad ; \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |



|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 51 | <p>Las matrices reales <math>A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}</math>; <math>B = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; -1 &amp; 2 \\ 1 &amp; 0 &amp; -2 \end{pmatrix}</math> y <math>C = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}</math> verifican:</p> <p>a) <math>A \cdot B = C^t</math>    b) <math>B^t \cdot A = C</math>    c) <math>B \cdot A = C</math>    d) <math>A \cdot B^t = C</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                             |
|    | <p><u>Solución:</u> Los productos a) y d) no se pueden realizar por el orden de las matrices.</p> <p>Si probamos la b) obtenemos <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ 0 &amp; -1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 2 &amp; -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}</math>. Esta es la respuesta</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 52 | <p>La inversa de la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 &amp; -3 \end{pmatrix}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} -3 &amp; -3 &amp; -2 \\ -1 &amp; 2 &amp; 1 \\ -1 &amp; 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} -3 &amp; -3 &amp; -2 \\ -1 &amp; 2 &amp; 1 \\ -1 &amp; -1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 3 &amp; -3 &amp; -2 \\ -1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 1 &amp; -1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>    d) Ninguna</p>                                                                                                                                                              |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculamos <math> A  = -1</math>; <math>A^t = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; 0 \\ -1 &amp; 1 &amp; -3 \end{pmatrix}</math>; <math>\text{Ad}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 &amp; 3 &amp; 2 \\ 1 &amp; -2 &amp; -1 \\ -1 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p> <p>y por último <math>A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 &amp; 3 &amp; 2 \\ 1 &amp; -2 &amp; -1 \\ -1 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 &amp; -3 &amp; -2 \\ -1 &amp; 2 &amp; 1 \\ 1 &amp; -1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math> que es la c)</p>                                                                                                                |
| 53 | <p>Si la matriz real <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; b \\ c &amp; 2 \end{pmatrix}</math> es tal que <math>bc = 3</math>, entonces su inversa es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; -b \\ -c &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    b) <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; c \\ b &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; b \\ c &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    d) No es invertible para ningún b y c</p>                                                                                                                                                                                                                                                           |
|    | <p><u>Solución:</u> Calculemos la inversa:</p> <p>a) <math> A  = 4 - bc = 4 - 3 = 1</math>    b) <math>A^t = \begin{pmatrix} 2 &amp; c \\ b &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    c) <math>\text{Ad}(A^t) = \begin{pmatrix} 2 &amp; -b \\ -c &amp; 2 \end{pmatrix}</math>    d) <math>A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 &amp; -b \\ -c &amp; 2 \end{pmatrix}</math></p> <p>La respuesta es la a). Podíamos haberlo hecho probando, multiplicando la matriz A por los posibles resultados.</p> <p>Así: <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; b \\ c &amp; 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 &amp; -b \\ -c &amp; 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - bc &amp; 0 \\ 0 &amp; -bc + 4 \end{pmatrix}</math></p> |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | y como $bc = 3$ quedaría $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que es la identidad                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 54 | <p>Sea la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; -1 &amp; 0 \\ 3 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 2 &amp; 1 \\ -1 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>. Se verifica:</p> <p>a) <math>A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 &amp; 3 &amp; -2 &amp; -1 \\ 3 &amp; 10 &amp; 1 &amp; -2 \\ -2 &amp; 1 &amp; 5 &amp; 1 \\ -1 &amp; -2 &amp; 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>      b) <math>A^t \cdot A</math> no está definido</p> <p>c) <math>A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 &amp; 3 &amp; -2 &amp; -1 \\ 3 &amp; 10 &amp; 1 &amp; -2 \\ -2 &amp; 1 &amp; 5 &amp; 1 \\ -1 &amp; -2 &amp; 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>      d) <math>A^t \cdot A = A \cdot A^t = I</math></p>                                                                                                                                                                                                                                    |
|    | <u>Solución:</u> Probando, comprobamos que es la a)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 55 | <p>Si el valor de <math>a</math> es tal que la matriz <math>A = \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ -1 &amp; -1 &amp; a \end{pmatrix}</math> es invertible entonces <math>A^{-1}</math> es:</p> <p>a) <math>\begin{pmatrix} \frac{a}{a-1} &amp; -1 &amp; \frac{1}{a-1} \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ \frac{1}{a-1} &amp; 0 &amp; \frac{1}{a-1} \end{pmatrix}</math>      b) <math>\begin{pmatrix} \frac{a}{a+1} &amp; -1 &amp; \frac{1}{a+1} \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ \frac{1}{a+1} &amp; 0 &amp; \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}</math></p> <p>c) <math>\begin{pmatrix} \frac{a}{1-a} &amp; -1 &amp; \frac{1}{1-a} \\ 0 &amp; -1 &amp; 0 \\ \frac{1}{1-a} &amp; 0 &amp; \frac{1}{1-a} \end{pmatrix}</math>      d) <math>\begin{pmatrix} \frac{-a}{a+1} &amp; -1 &amp; \frac{-1}{a+1} \\ 0 &amp; -1 &amp; 0 \\ \frac{-1}{a+1} &amp; 0 &amp; \frac{-1}{a+1} \end{pmatrix}</math></p> |
|    | <p><u>Solución:</u> La calculamos: <math> A  = a - 1</math> ; <math>A^t = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; -1 \\ 1 &amp; 1 &amp; -1 \\ -1 &amp; 0 &amp; a \end{pmatrix}</math></p> <p><math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} a &amp; -a+1 &amp; 1 \\ 0 &amp; a-1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> y</p> <p><math>A^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a &amp; -a+1 &amp; 1 \\ 0 &amp; a-1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 0 &amp; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1} &amp; -1 &amp; \frac{1}{a-1} \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ \frac{1}{a-1} &amp; 0 &amp; \frac{1}{a-1} \end{pmatrix}</math> que es la a)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 56 | La inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ es:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

|                        |                   |               |
|------------------------|-------------------|---------------|
| Matrices/Determinantes | Apuntes sencillos | Javier Burgos |
|------------------------|-------------------|---------------|

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|    | <p><u>Solución:</u> La calculamos:</p> <p>a) <math> A  = \begin{vmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 0 \\ 2 &amp; 3 &amp; -1 \\ 0 &amp; 2 &amp; -1 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 2 = 1</math></p> <p>b) <math>A^t = \begin{pmatrix} 1 &amp; 2 &amp; 0 \\ 1 &amp; 3 &amp; 2 \\ 0 &amp; -1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math></p> <p>c) <math>Ad(A^t) = \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 4 &amp; -2 &amp; 1 \end{pmatrix}</math></p> <p>d) <math>A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 4 &amp; -2 &amp; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 &amp; 1 &amp; -1 \\ 2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 4 &amp; -2 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> que es la b)</p> |
| 57 | <p>Considérese la matriz real siguiente: <math>\begin{pmatrix} b &amp; a-b &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; b &amp; -1 &amp; 1 \\ b &amp; a &amp; b &amp; a \end{pmatrix}</math> donde a y b son parámetros reales. Su rango verifica:</p> <p>a) no es igual a 2 cualesquiera que sean a y b    b) es igual a 2 si <math>a = b = 0</math></p> <p>c) es igual a 3 cualesquiera que sean a y b    d) Es igual a 2 si <math>a = b = 1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                        |
|    | <p><u>Solución:</u> Probamos con la b) ya que nos dan valores de a y b. La matriz sería <math>\begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; 0 &amp; -1 &amp; 1 \\ 0 &amp; 0 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>. En este caso es de rango 1 al tener una columna L.I.</p> <p>Probamos con la d) <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 1 &amp; -1 \\ 0 &amp; 1 &amp; -1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>. En este caso es de rango 3 (hemos hecho el determinante formado por las tres primeras columnas y nos ha dado distinto de 0). Luego esta respuesta no es cierta. La c) tampoco porque la b) lo desmiente. La respuesta es la a)</p>                   |