SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Ecuación lineal con dos incógnitas

Definición: Es una igualdad de la forma $ax + by = c$, de donde a, b y c son números reales.

- A los números “a” y “b” se les llama **coeficientes**;
- al número “c”, **término independiente**
- a “x” e “y” se las llama **incógnitas**.

Ejemplos: $3x - y = 5$; $x + 5y = -2$; $2x + 3y = 0$; $6x + y = -3$

¿Cómo es una solución?: Una solución de una ecuación con dos incógnitas es un par de números reales que, sustituidos en la ecuación, cumplen la igualdad.

Ejemplo: Para la ecuación $3x - y = 5$,
los valores $x = 2 , y = 1$ son una solución, pero también lo es:
$x = 0 , y = -5$
$x = 1 , y = -2$
$x = 3 , y = 4$
etc….

En este caso, observamos que hay infinidad de parejas de valores para x, y que verifican la ecuación y todas ellas se obtienen dándole un valor arbitrario a una de ellas y calcular el correspondiente de la otra.

La forma de expresar **todas las soluciones** es siempre en función de un parámetro y se suelen utilizar las letras griegas λ y μ, así, en este caso lo expresaríamos:

$$x = \lambda \quad y = 3\lambda - 5$$

o también

$$y = \lambda \quad x = \frac{5+\lambda}{3}$$

dependiendo de cuál sea la incógnita a la que se le asigna el valor arbitrario

2. Ecuación lineal con tres incógnitas

Definición: es una igualdad de la forma $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal con **tres incógnitas**. En este caso, una solución será una terna de números que la verifiquen

Ejemplo: $x + 2y - z = 5$; $2x + y - 3x = -1$.

Una solución de la primera sería $x = 2 , y = 3$ $z = 3$ ó también $x = -1$ $y = 5$ $z = 4$

Se observa que también hay infinitas soluciones. En este caso serán dos las incógnitas que tomen valores arbitrarios y la tercera se calcularán en función de éstas. Para escribir todas las soluciones pondremos para la primera de ellas lo siguiente:

$$x = \lambda \quad y = \mu \quad z = \lambda + 2\mu - 5 \equiv \{(\lambda, \mu, \lambda + 2\mu - 5), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Obsérvese que la solución se puede plantear de otra forma si las incógnitas a las que se le asignan valores cualesquiera no son la “x” y la “y”

3. Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Definición: Lo forman 2 o más ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Así, por ejemplo, un sistema lineal de **dos ecuaciones** con dos incógnitas sería de la forma

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}\right\}$$

Ejemplo: $\left.\begin{matrix} 2x - 5y = 16 \\ x + 4y = -5 \end{matrix}\right\}$

Una solución es una pareja de valores que verifican simultáneamente las dos ecuaciones, en este caso $x = 3 \ y = -2$

Sistemas equivalentes

Definición: Dos sistemas de ecuaciones lineales son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo: los sistemas $\left.\begin{matrix} 2x - 5y = 16 \\ x + 4y = -5 \end{matrix}\right\}$ y $\left.\begin{matrix} x - y = 5 \\ 4x + 3y = 6 \end{matrix}\right\}$ tienen la misma solución $x = 3 \ y = -2$

Criterios de equivalencia

A continuación, vemos diferentes criterios que podemos tener en cuenta para saber si dos sistemas son equivalentes:

a) Si se multiplican los dos miembros de una de las ecuaciones por un número distinto de 0 se obtiene otro sistema equivalente al que teníamos.
b) Si a una ecuación de un sistema se le suma otra ecuación del mismo, resulta un sistema equivalente al dado.
c) Si a un sistema de ecuaciones se le suprime una o más ecuaciones que son combinación lineal de las restantes, se obtiene un sistema equivalente al que teníamos.

Métodos de resolución de ecuaciones:

De forma general, resolver sistemas de ecuaciones con varias incógnitas es intentar reducir el número de ecuaciones y de incógnitas hasta llegar a una ecuación con una incógnita.

Método de reducción

Consiste en conseguir que una de las incógnitas tenga coeficientes opuestos en las dos ecuaciones para que al sumar las ecuaciones desaparezca esa incógnita. Para ello se puede multiplicar todos los coeficientes de una o las dos ecuaciones por los números adecuados. Después se sumarán miembro a miembro y obtendremos una ecuación con una incógnita.

Ejemplo: $\left.\begin{matrix} 2x - 5y = 16 \\ x + 4y = -5 \end{matrix}\right\}$

Si queremos eliminar la "y" tendremos que multiplicar la primera ecuación por 4 y la segunda por 5.

Obtenemos así el sistema $\left.\begin{array}{l} 8x-20y=64 \\ 5x+20y=-25 \end{array}\right\}$.

Al sumar nos queda $13x \qquad = 39$ y despejando la $x = \frac{39}{13} = 3$.

Sustituimos ahora en cualquiera de las ecuaciones iniciales, por ejemplo, en la segunda y nos queda $3 + 4y = -5$ de donde $4y = -8$ $y = -2$

La solución es, por tanto: $x = 3$ $y = -2$

<u>Método de sustitución</u>

Consiste en despejar (despejar una incógnita es dejarla sola en un miembro con coeficiente 1) de una de las ecuaciones una incógnita (siempre la que más fácil nos parezca) y sustituir su valor en la otra con lo que se obtiene una única ecuación con una incógnita.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=16 \\ x+4y=-5 \end{array}\right\}$

De la segunda despejamos x. que valdrá $x = -5 - 4y$.

Sustituimos esa incógnita en la otra ecuación, así:

$$2(-5-4y)-5y = 16$$

de donde

$$-10-8y-5y = 16$$

y de aquí, $-13y = 26$ y, por tanto: $y = -\frac{26}{13} = -2$.

Ahora sustituimos en la expresión donde hemos despejado la x y obtenemos:
$x = -5-4(-2) = -5+8 = 3$ que es la misma solución de antes

<u>Método de igualación</u>

Consiste en despejar de las dos ecuaciones la misma incógnita igualando después los resultados, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=16 \\ x+4y=-5 \end{array}\right\}$

Despejando la x en la primera ecuación: $2x = 16 + 5y$ de donde $x = \frac{16+5y}{2}$

Despejando la x en la segunda ecuación: $x = -5 - 4y$.

Igualando se obtiene: $\frac{16+5y}{2} = -5 - 4y$.

Reduciendo a común denominador nos queda 16 + 5y = 2(– 5 – 4y)

De donde $16 + 5y = -10 - 8y$. De aquí $13y = -26$, $y = -\frac{26}{13} = -2$ y calculando la "x" de cualquiera de las expresiones de donde está despejada obtenemos $x = 3$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver por reducción, sustitución e igualación los siguientes sistemas:

1.- $\left.\begin{array}{r} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$	2.- $\left.\begin{array}{r} 7x+4y=80 \\ 5x-6y=4 \end{array}\right\}$	3.- $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=5 \\ x-y=-5 \end{array}\right\}$
4.- $\left.\begin{array}{r} 12x-3y=12 \\ 8x+y=20 \end{array}\right\}$	5.- $\left.\begin{array}{r} 5x-8y=19 \\ 2x-2y=10 \end{array}\right\}$	6.- $\left.\begin{array}{r} 5x-2y=11 \\ x+3y=9 \end{array}\right\}$

SOLUCIONES

1. $x=1$ $y=1$	2. $x=8$ $y=6$	3. $x=-20$ $y=-15$
4. $x=2$ $y=4$	5. $x=7$ $y=2$	6. $x=3$ $y=2$

4. Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Definición: Son agrupaciones de dos o más ecuaciones lineales con tres incógnitas.

Por ejemplo, con tres ecuaciones serían igualdades de la forma $\left.\begin{array}{r} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{array}\right\}$

Para resolverlos se utiliza generalmente el método de reducción. Para ello se eligen dos ecuaciones y por este método se elimina una incógnita, obteniendo así una ecuación con dos incógnitas. A continuación, se coge la ecuación que no se ha usado todavía, y con cualquiera de las otras dos se vuelve a eliminar por reducción **"la misma incógnita de antes"** obteniendo otra ecuación con las mismas incógnitas. Con estas se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que ya sabemos resolver

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\}$ Observando el sistema, vemos que la incógnita más fácil

de eliminar es la "z" puesto que todos sus coeficientes son 1.

Cogemos las dos primeras ecuaciones y multiplicando la primera por -1 nos

queda $\left.\begin{array}{r} -x-y-z=-11 \\ 2x-y+z=5 \end{array}\right\}$ Sumando ambas obtenemos $\boldsymbol{x-2y=-6}$

Ahora cogemos la primera y tercera por ejemplo y multiplicando ésta por -1 de nuevo nos queda $\left.\begin{array}{r} -x-y-z=-11 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\}$ Sumando obtenemos $\boldsymbol{2x+y=13}$

Tomando las dos ecuaciones resultantes formamos el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (hemos pasado de 3 ec. con 3 incógnitas a 2 con 2, mucho más sencillo)

$\left.\begin{array}{r} x-2y=-6 \\ 2x+y=13 \end{array}\right\}$ que podemos resolverlo por sustitución:

Despejamos x en la primera ecuación $x = -6 + 2y$.

Sustituimos en la segunda ecuación $2(-6 + 2y) + y = 13$ de donde:
$-12 + 4y + y = 13$

y de aquí $5y = 25$ de donde $y = 5$.

La x valdrá $x = -6 + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4.$

Ahora sustituimos en cualquiera de las ecuaciones iniciales y calculamos z que nos dará $z = 2$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. $\left.\begin{array}{r} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-z=76 \\ 8x-y-4z=110 \end{array}\right\}$	2. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\}$	3. $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x+\quad z=4 \\ y+z=5 \end{array}\right\}$
4. $\left.\begin{array}{r} x+y\quad=12 \\ y+z=8 \\ x\quad+z=6 \end{array}\right\}$	5. $\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 2y+3z=15 \\ 3x+y\quad=12 \end{array}\right\}$	6. $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=15 \\ 5x-y+5z=16 \\ x+4y+z=20 \end{array}\right\}$

SOLUCIONES

1. $x = 16$ $y = 2$ $z = 4$	2. $x = 1$ $y = -2$ $z = 3$	3. $x = 1$ $y = 2$ $z = 3$
4. $x = 5$ $y = 7$ $z = 1$	5. $x = y = z = 3$	6. $x = 5$ $y = 4$ $z = -1$

SISTEMAS LINEALES DE CUALQUIER DIMENSIÓN

1.- Definición de sistema lineal de "m" ecuaciones con "n" incógnitas

A un conjunto de "m" igualdades de la forma

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

se le llama sistema lineal de "m" ecuaciones con "n" incógnitas.

A los elementos a_{ij} se les llama **coeficientes**
A x_1 ; x_2 ;...........; x_n se les llama **incógnitas**
A b_1 ; b_2 ;...........; b_m se les llama **términos independientes**

Si todos los b_i son 0, el sistema se llama **homogéneo**

Una **solución** de un sistema es un conjunto de n números reales que sustituyendo en las incógnitas hacen que se cumplan todas las ecuaciones. (se verifiquen las igualdades)

Notas:

- **Resolver un sistema** es encontrar **todas** las soluciones
- **Discutir un sistema** es decir de que tipo es.

2.- Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineal

Dado un sistema lineal cualquiera, podemos asociarle dos matrices. La formada por los coeficientes de las incógnitas, llamada **"matriz de coeficientes"** y otra formada por la anterior a la que se le ha añadido al final la columna de los términos independientes y que se llama **"matriz ampliada".**

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 6x + 7y + 8z = 9 \\ 10x + 11y + 12z = 13 \end{array}\right\}$ las matrices asociadas serían

(A) = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ (de coeficientes) $(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$ (ampliada)

3.-REGLA DE CRAMER

Definición: Es un método para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de Cramer, que cumplen estas dos condiciones:

a) El sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas

b) El determinante de la matriz de coeficientes es distinto de 0

En el caso que se cumplan estas premisas se puede demostrar que el valor de cada incógnita se obtiene al dividir dos determinantes.
El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes y el numerador es el determinante de la matriz de coeficientes, pero cambiando la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se quiere calcular, por los coeficientes de los términos independientes. Veámoslo con los ejemplos resueltos de los sistemas anteriores.

Ejemplo 1. Resolver por la regla de Cramer el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=16 \\ x+4y=-5 \end{array}\right\}$

La primera condición la cumple y comprobamos que también cumple la segunda

$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$. Entonces al ser un sistema de Cramer nos permite afirmar que

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{39}{13} = 3 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{-26}{13} = -2$ que era la solución obtenida antes.

Ejemplo 2. $\left.\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\}$. La primera condición la cumple. Veamos la segunda

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$ En este caso, la solución será:

$$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 24 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{20}{5} = 4 \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 24 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{25}{5} = 5 \qquad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 24 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{10}{5} = 2$$

4.- RANGO DE UNA MATRIZ

Definición: Dada una matriz A de orden mxn, su **rango** es el número de filas o columnas que tiene la mayor submatriz cuadrada que se puede extraer de la matriz original A cuyo determinante sea distinto de 0.
También se puede definir como el número de filas o columnas linealmente independientes (que siempre son las mismas)

PROBLEMAS PROPUESTOS

Calcular el rango de las matrices:

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & -8 \end{pmatrix}$	$b)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	$e)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$f)\ \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 11 & -6 & 17 \\ 5 & -1 & 24 & -37 \end{pmatrix}$
$g)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{pmatrix}$	$h)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$i)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

SOLUCIONES

$a)$ 2	$b)$ 3	$c)$ 3
$d)$ 3	$e)$ 3	$f)$ 2
$g)$ 3	$h)$ 3	$i)$ 2

5.- TEOREMA DE ROUCHÉ

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución es que el **rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada**.

- Si dicho rango es igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si el rango es menor al número de incógnitas, entonces el sistema es compatible e indeterminado (infinitas soluciones).

Ejemplos de discusión de sistemas:

1	$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=4 \end{array}\right\}$
	Solución: Las matrices asociadas son: $(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (de coeficientes) $(A\|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ampliada) Como el $rg(A) = 2\ \ y\ \ rg(A,B) = 3$, es decir son distintos el sistema es incompatible

2	$\left.\begin{array}{l} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{array}\right\}$
	<u>Solución:</u> Las matrices asociadas son: $(A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ (de coeficientes) $(A\mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ (ampliada) Como el $rg(A)=3$ y $rg(A,B)=3$, es decir son iguales e igual al número de incógnitas, el sistema es compatible determinado (solución única).
3	$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{array}\right\}$
	<u>Solución:</u> Las matrices asociadas son: $(A)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (de coeficientes) $(A\mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (ampliada) Como $rg(A)=rang(A,B)=2$, el sistema tiene solución y como es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible e indeterminado. **¿Cómo se resolvería?** • Elegimos la submatriz de la matriz A que nos ha dado el rango. Podría ser por ejemplo ésta $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ • Al ser rango 2 y elegir esta matriz de 2x2 como matriz de rango, nos indica que las filas que quedan fuera, son ecuaciones que se pueden eliminar (por ser la tercera fila, combinación lineal de las dos primeras) y las columnas que también quedan fuera corresponden a **“incógnitas no principales”** que, pasadas al segundo miembro, actúan como término independiente (en este caso la tercera columna, correspondiente a la incógnita “z”). Estas incógnitas toman valores cualesquiera y se les llama **parámetros**. El sistema a resolver sería $\left.\begin{array}{l} x+2y=1-z \\ 2x+y=2-2z \end{array}\right\}$ Este sistema lo resolvemos por reducción, por ejemplo, multiplicando la primera por – 2 queda $\left.\begin{array}{l} -2x-4y=-2+2z \\ 2x+y=2-2z \end{array}\right\}$ Al sumar queda $-3y=0$ de donde $y=0$ y la x valdría $x=\frac{2-2z}{2}=1-z$. Si a z le damos el valor λ, la solución quedaría: $(x=1-\lambda\ ;\ y=0\ ;\ z=\lambda)$. Si este parámetro toma valores arbitrarios, el sistema toma infinitas soluciones

Discutir los sistemas siguientes

1.- $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=-1 \\ x+y-z=4 \\ 6x-y+z=0 \end{array}\right\}$	2.- $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=10 \\ 2x-y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$	3.- $\left.\begin{array}{r} x-y+3z=4 \\ 2x-y-z=6 \\ 3x-2y+2z=10 \end{array}\right\}$
4.- $\left.\begin{array}{r} x+y+z=14 \\ x-y+z=22 \\ -x+y+z=2 \end{array}\right\}$	5.- $\left.\begin{array}{r} x+y+z=4 \\ x+3z=0 \\ 3x+2y=13 \end{array}\right\}$	

SOLUCIONES:

1.- Incompatible	2.- Compatible determinado	3.- Compatible indeterminado
4.- Compatible determinado	5.- Compatible determinado	

6.- SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Definición: Un sistema es **homogéneo** si todos sus términos independientes valen 0.

Ejemplos: a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -x+11y-4z=0 \\ -2x+4y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array}\right\}$

Obsérvese que cualquier sistema homogéneo, admite la solución trivial (aquella en la que todas las incógnitas toman el valor 0). La cuestión consiste en poder averiguar si el sistema admite alguna otra solución que no sea ésta. La condición nos la aclara el Teorema de Rouché para sistemas homogéneos

7.- TEOREMA DE ROUCHÉ PARA SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones homogéneo tenga solución distinta de la trivial es que **el rango de la matriz de coeficientes sea menor** que el número de incógnitas.

Nótese que en los sistemas homogéneos la matriz ampliada no tiene sentido al añadirle a la matriz de coeficientes la de los términos independientes que son todo ceros y, por lo tanto, no puede ampliar el rango

Resolvamos los ejemplos anteriores:

Ejemplo a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 3x+y=0 \end{array}\right\}$. En este caso la matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Como su determinante es $7 \neq 0$ el rango es 2 = nº de incógnitas y el sistema sería compatible determinado y por tanto la solución sería única, y tendría que ser $x = y = 0$

Ejemplo b) $\left.\begin{aligned}-x+11y-4z&=0\\-2x+4y+z&=0\\x+y-2z&=0\end{aligned}\right\}$ la matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix}-1&11&-4\\-2&4&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$

Como su determinante es 0, el rango no es 3. Si encontramos una submatriz cuadrada de orden 2 con determinante $\neq 0$, su rango será 2. Puede ser, por ejemplo: ésta $\begin{pmatrix}-2&4\\1&1\end{pmatrix}$ (hay otras muchas posibilidades).

Como el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible e indeterminado. Veamos cómo se resuelve. Al elegir esta matriz de 2x2 como matriz de rango, nos indica que las filas que quedan fuera son ecuaciones que se pueden eliminar (en este caso la primera) y las columnas que también quedan fuera corresponden a **"incógnitas no principales"** que pasadas al segundo miembro, actúan como término independiente (en este caso la tercera, correspondiente a la incógnita "z").

Estas incógnitas toman valores cualesquiera y se les llama parámetros.

El sistema a resolver sería $\left.\begin{aligned}-2x+4y&=-z\\x+y&=2z\end{aligned}\right\}$ Por reducción, multiplicando la 2ª por 2 obtenemos $\left.\begin{aligned}-2x+4y&=-z\\2x+2y&=4z\end{aligned}\right\}$ y sumando: 6y = 3z de donde $y=\frac{z}{2}$ y la "x" valdría

$x = 2z - y = 2z - \frac{z}{2} = \frac{3z}{2}$. No obstante, la solución puede darse de esta forma. Si le damos a $z=\lambda$ (parámetro) la $x=\frac{3\lambda}{2}$ y la $y=\frac{\lambda}{2}$

Obsérvese que la solución puede variar según qué ecuaciones tomemos en el sistema a resolver.

Según esto, en los exámenes tipo test, en ocasiones es mejor sustituir en las ecuaciones del sistema las soluciones propuestas en las respuestas.

Discutir los siguientes sistemas homogéneos:

1. $\left.\begin{aligned}-x+11y-4z&=0\\-2x+4y+z&=0\\x+y-2z&=0\end{aligned}\right\}$	2. $\left.\begin{aligned}x-y-z&=0\\x+y+3z&=0\\x-5y-9z&=0\end{aligned}\right\}$	3. $\left.\begin{aligned}3x+6y+3z&=0\\5x+10y+5z&=0\\x+2y+z&=0\end{aligned}\right\}$

Soluciones:

1. Como $rg(A)=2$ el sistema es compatible e indeterminado	2.- Como $rg(A)=2$ el sistema es compatible e indeterminado	3.- Como $rg(A)=1$ el sistema es compatible e indeterminado

PROBLEMAS RESUELTOS:

1	Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} cx+y+cz=1 \\ x+cy \qquad =0 \\ x+y+cz=0 \end{cases}$. ¿Para qué valores de "c" el sistema admite infinitas soluciones? a) Sólo para c = 1 b) Para c = 0 o para c = 1 c) Sólo para c = 0 d) Ninguna de las anteriores
	Solución: Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes: $\begin{vmatrix} c & 1 & c \\ 1 & c & 0 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = c^3 - c^2$ que se anula para $c = 1$ y $c = 0$. Para $c = 1$ el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Para el valor $c = 0$ también es incompatible ya que el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada es 3. La respuesta correcta por tanto es la d) .
2	Sigue del problema anterior. Si c = 1, el sistema a) Es homogéneo b) Admite infinitas soluciones c) Admite una única solución d) No admite soluciones
	Solución: Para $c = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada es 3 y el sistema es incompatible. Luego la respuesta correcta es la d)
3	Sigue del problema anterior. Si $c = -1$, el sistema a) No admite solución b) Admite una única solución que es $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$ c) Admite soluciones de la forma $\lambda\,(1, 1, 2)$

	d) Admite una única solución que es (0, 0, 0)
	Solución**:** Si c = – 1 los rangos son iguales a 3 que es el número de incógnitas y el sistema es, por tanto, compatible determinado (solución única). Se prueba que la solución es la b)
4	Sea $a \in R$ y sean los sistemas: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + a x_2 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ a) Para cualquier valor de “a” los sistemas no son equivalentes pues tienen diferente número de ecuaciones b) Si $a \neq -1$ los sistemas son equivalentes c) Si los sistemas son equivalentes, entonces $a = 2$ d) Si $a = -1$ los sistemas son equivalentes
	Solución**:** Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. El segundo tiene por solución: $x_1 = 1 \; y \; x_2 = 1$ (se ha resuelto cogiendo las dos primeras y sustituyendo los valores obtenidos en la tercera para ver si la cumplen). Sustituyendo en el primer sistema nos da $a = 2$ que es la c)
5	Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$. Se verifica a) Las soluciones son de la forma $\lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda \in$R b) El sistema tiene una única solución $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) Las soluciones son de la forma$\lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda \in$R d) El sistema tiene una única solución $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
	Solución**:** Es homogéneo. Como el rango de la matriz asociada $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2 que es el número de incógnitas, el sistema tiene una única solución que es la trivial que es la b)

6	Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \end{cases}$. Se verifica a) Las soluciones son de la forma $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda \in$R b) El sistema tiene una única solución $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) Las soluciones son de la forma$\lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda \in$R d) El sistema tiene una única solución $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
	Solución: Es homogéneo. Su matriz asociada es $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \\ -1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Como el rango de la matriz es 3 (porque su determinante es distinto de 0) que es igual al número de incógnitas, el sistema tiene una única solución que es la trivial que es la b)
7	Sea $a \in R$ y sean los sistemas siguientes: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ ax_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ Se verifica: a) Para cualquier valor de "a" los sistemas no son equivalentes pues tienen diferente número de ecuaciones b) Si $a \neq -1$ los sistemas son equivalentes c) Si los sistemas son equivalentes, entonces a = 2 d) Si $a = -1$ los sistemas son equivalentes
	Solución: Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. El segundo tiene por solución $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$. (se ha resuelto cogiendo las dos primeras y sustituyendo los valores obtenidos en la tercera para ver si la cumplen). Sustituyendo en el primer sistema nos da $a = 2$ que es la c)
8	Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x \quad\quad + z + t = 0 \\ \quad y + z - t = 0 \\ x + 3y + 4z - 2t = 0 \end{cases}$. Se verifica

	a) El sistema admite una única solución b) El sistema no admite solución c) Toda solución es de la forma $\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ para $\lambda,\mu \in R^2$ d) Toda solución es de la forma $\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ para algún $\lambda \in R$.
	Solución: Es homogéneo. Como el rango de la matriz de coeficientes $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\1&3&4&-2\end{pmatrix}$ es 2 ya que sólo las dos primeras columnas son L.I. (Obsérvese que la tercera, es la suma de las dos primeras y la cuarta es la resta. También se puede hacer por determinantes, viendo que los de 3x3 dan 0). Como el rango es 2 que es menor que el número de incógnitas que es 4, el sistema es compatible indeterminado con dos incógnitas no principales (grados de libertad). La única respuesta posible es la c) y probándola vemos que lo cumple
9	Sean los siguientes sistemas $\begin{cases}x+y=1\\ax-y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x+2y=0\\x+3y=1\end{cases}$ a) Para cualquier valor de "a" el primer sistema tiene solución única b) Los sistemas son equivalentes si $a=-5$ c) Si $a=-1$ los sistemas tienen solución única y son equivalentes d) Los sistemas no son equivalentes para ningún valor de "a"
	Solución: Si resolvemos el segundo sistema obtenemos $y=1, x=-2$ que no cumplen la primera ecuación del segundo sistema, por lo tanto, nunca pueden ser equivalentes que es la d)
10	Sea a∈R y sea el sistema siguiente: $\begin{cases}x \qquad +az=1\\2x+y+z=0\\x+y \qquad =0\end{cases}$ Se verifica: a) El sistema admite solución para cualquier valor de a b) El sistema tiene infinitas soluciones si a = 1

c) El sistema no admite solución si a = 1

d) Ninguna de las anteriores

Solución: Si $a = 1$, discutimos el rango de las matrices del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2 al ser su determinante 0 y tener las dos primeras columnas L.I.; el de la ampliada es 3, ya que las columnas primera, segunda y cuarta nos dan determinante distinto de 0.
Por lo tanto, el sistema no admite solución para a = 1 que es la c)

11

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad + 2x_4 = 0 \end{cases}$. Se verifica

a) El sistema no tiene ninguna solución

b) Toda solución es de la forma $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda, \mu \in \mathrm{R}^2$

c) El sistema tiene una única solución

d) Toda solución es de la forma $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda, \mu \in \mathrm{R}^2$

Solución: El sistema es homogéneo. Como el rango de la matriz de coeficientes es 2(se puede ver por determinantes que los de 3x3 dan 0 y las dos primeras columnas son L.I.) y hay cuatro incógnitas, es compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Probando las soluciones b y d, y comprobamos que es la b)

12

Sean los sistemas de ecuaciones: $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 2 \\ \qquad 3x_3 = 0 \end{cases}$ Se verifica:

a) El segundo sistema no admite solución

b) Ninguno de los sistemas admite solución

c) Son equivalentes

d) Ninguna de las anteriores

	Solución: El segundo sistema que es compatible e indeterminado, nos da por solución: $x_3 = 0$; $x_2 = \lambda$; $x_1 = -2-2\lambda$ que también es solución del primero y las soluciones del primero que si lo resolvemos es la misma de antes verifica el segundo, luego los sistemas son equivalentes que es la c)
13	Sigue del anterior a) El primer sistema no tiene ninguna solución b) Toda solución del primero es de la forma $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ para $\lambda \in R$ c) Toda solución del primero es de la forma $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ para $\lambda \in R$ d) ninguna de las anteriores.
	Solución: Ya está resuelto en el apartado anterior. La respuesta es la b) ya que: $\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\mathbf{-2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2-2\lambda}\\\boldsymbol{\lambda}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$
14	Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases}-x_1-x_2+x_3-2x_4=0\\x_2+x_3-x_4=0\\x_1+x_3-3x_4=0\end{cases}$. Se verifica a) El sistema no tiene ninguna solución b) Toda solución es de la forma $\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ para algún $\lambda \in R$ c) El sistema tiene una única solución d) Toda solución es de la forma $\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ para algún $\lambda \in R$
	Solución: Es homogéneo. Como el rango es 3 que es menor que el número de incógnitas (que es 4) el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad. Probando se comprueba que la solución es la b)

15	Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases}3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 0\end{cases}$. Se verifica a) El sistema no tiene ninguna solución b) Toda solución es de la forma $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda,\mu \in R^2$ c) El sistema tiene una única solución d) Toda solución es de la forma $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ para $\lambda,\mu \in R^2$
	Solución: Es homogéneo. Como el rango es 2 que es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad. Probando se comprueba que es la b)