

EJERCICIOS: OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN. FUNCIÓN INVERSA

1. Suma las funciones $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ y $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ y obtén el dominio de la función resultante.
2. Multiplica las funciones $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ y obtén el dominio de la función resultante.
3. Obtén la expresión de la función $\left(\frac{f}{g}\right)$ siendo $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, y obtén su dominio.
4. Para los siguientes pares de funciones, obtén la función compuesta $(f \circ g)$ y su dominio.
 - a) $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$
 - b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 1$
 - c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$
5. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{2x-1}$ y $g(x) = x^2 - 1$, calcula las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$, y el dominio de cada una.
6. Estudia cuáles de estas funciones son inyectivas.
 - a) $f(x) = 2x - 3$
 - b) $f(x) = \frac{1+2x}{x}$
 - c) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$
 - d) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
 - e) $f(x) = \frac{3-4x}{2}$
 - f) $f(x) = x^3 - 2$
 - g) $f(x) = \frac{2x^2-7}{x}$
 - h) $f(x) = \sqrt{x-1}$
7. Comprueba que las siguientes funciones son inyectivas, obtén la función inversa $f^{-1}(x)$ y comprueba que efectivamente lo es componiendo $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$.
 - a) $f(x) = \frac{1-3x}{6}$
 - b) $f(x) = \frac{3}{2-2x}$
 - c) $f(x) = e^{2x+3}$
 - d) $f(x) = \ln(2x+3)$
 - e) $f(x) = \frac{7-x}{x}$
 - f) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$
 - g) $f(x) = \frac{3-x}{4+5x}$

Soluciones

1. $(f+g)(x) = \frac{4x-2}{x^2-2x}$, $Dom(f+g): x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$
2. $(f \cdot g)(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$, $Dom(f \cdot g): x \in \mathbb{R} - \{1\}$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x\sqrt{2-x}$, $Dom\left(\frac{f}{g}\right): x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$
4. a) $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$, $Dom(f \circ g): x \in \mathbb{R}$

$$\text{b) } (f \circ g)(x) = \sqrt{2x-1} \text{ , } \text{Dom}(f \circ g): x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

$$\text{c) } (f \circ g)(x) = \frac{1}{1+x} \text{ , } \text{Dom}(f \circ g): x \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

$$5. \quad (f \circ g)(x) = \sqrt{2x^2-3} \text{ , } \text{Dom}(f \circ g): x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty \right)$$

$$(g \circ f)(x) = 2x-2 \text{ , } \text{Dom}(g \circ f): x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

6. Son inyectivas las funciones de los apartados a), b), c), e), f) y h)

7. Las funciones inversas son:

$$\text{a) } f^{-1}(x) = \frac{1-6x}{3}$$

$$\text{b) } f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{2x}$$

$$\text{c) } f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 3}{2}$$

$$\text{d) } f^{-1}(x) = \frac{e^x - 3}{2}$$

$$\text{e) } f^{-1}(x) = \frac{7}{x+1}$$

$$\text{f) } f^{-1}(x) = x^3 + 2$$

$$\text{g) } f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{5x+1}$$