Solución de los Problemas Propuestos

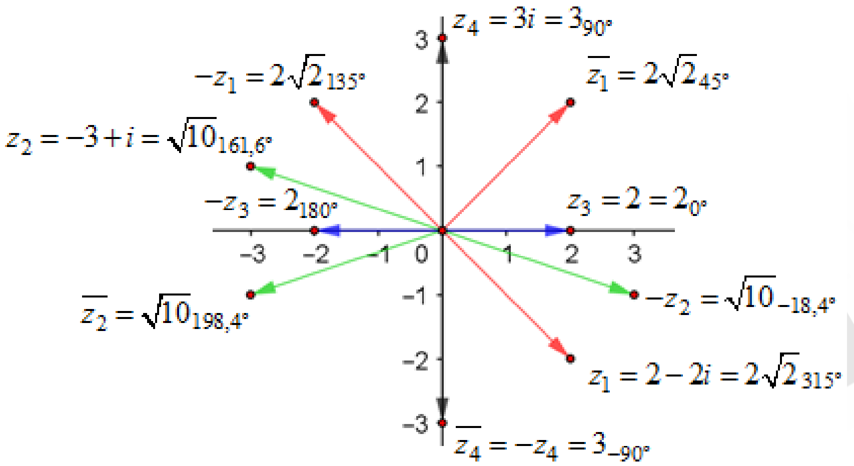
1. Dados los números complejos $z_1 = 2-2i$, $z_2 = -3+i$, $z_3 = 2$ y $z_4 = 3i$.
a) Para cada uno de ellos halla su conjugado y su opuesto.
b) Represéntalos (complejos, conjugados y opuestos) en el plano polar.
Solución:
a) $z_1 = 2-2i \to$ conjugado: $\overline{z_1} = 2+2i$; opuesto: $-z_1 = -2+2i$.

$z_2 = -3+i \to \overline{z_2} = -3-i$; $-z_2 = 3-i$.

$z_3 = 2 \to \overline{z_3} = 2$; $-z_3 = -2$.

$z_4 = 3i \to \overline{z_4} = -3i$; $-z_4 = -3i$.

b)



2. Para los mismos números complejos $z_1 = 2-2i$, $z_2 = -3+i$, $z_3 = 2$ y $z_4 = 3i$, halla sus módulos y argumentos, para ellos y para sus respectivos conjugados y opuestos.
Solución:
El módulo de un número complejo, el de sus conjugado y el de su opuesto es el mismo.
Si el argumento de un número complejo es α, el de su conjugado es –α (o 360º – α); el argumento de su opuesto es 180 + α (o 180º – α). Con esto:

- $z_1 = 2-2i \to$ módulo: $|z_1| = |\overline{z_1}| = |-z_1| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;

  argumento: $\alpha_1 = \arctan\left(\dfrac{-2}{2}\right) = 315º$ (observa que su afijo está en el cuarto cuadrante).

Por tanto: $z_1 = 2-2i = 2\sqrt{2}_{315º}$.

- $z_2 = -3+i \to$ módulo: $|z_2| = \sqrt{(-3)^2+1} = \sqrt{10}$;

  argumento: $\alpha_2 = \arctan\left(\dfrac{1}{-3}\right) = 161,6º$ (observa que su afijo está en el segundo cuadrante).

Por tanto: $z_2 = -3+i = \sqrt{10}_{161,6º}$.

- $z_3 = 2 \to$ módulo: $|z_2| = 2$; argumento: $\alpha_3 = \arctan 0 = 0º$ (afijo en el primer cuadrante)

Por tanto, $z_3 = 2 = 2_{0º}$.

- $z_4 = 3i \to$ módulo: $|z_4| = 3$; argumento: $\alpha_4 = \arctan\left(\dfrac{3}{0}\right) = 90º$ (afijo en la parte positiva del eje

imaginario) $\Rightarrow z_4 = 3i = 3_{90º}$.

3. Calcula:

a) $(2+3i)-(3-i)$; b) $3\cdot(4-3i)-5i$; c) $4-2i-3\cdot(2-i)$; d) $2\cdot(4-5i)-5\cdot(2-2i)$.

Solución:

a) $(2+3i)-(3-i) = 2+3i-3+i=-1+4i$.

b) $3\cdot(4-3i)-5i = 12-9i-5i=12-14i$.

c) $4-2i-3\cdot(2-i) = 4-2i-6+3i=-2+i$.

d) $2\cdot(4-5i)-5\cdot(2-2i) = 8-10i-10+10i=-2$.

4. Calcula:

a) $(2+3i)\cdot(3-2i)$; b) $(-3+i)\cdot(-5+2i)$; c) $(2-3i)^2$; d) $(4+5i)^2$.

Solución:

a) $(2+3i)\cdot(3-2i) = 6-4i+9i-6i^2=6+5i+6=12+5i$.

b) $(-3+i)\cdot(-5+2i) = 15-6i-5i+2i^2=15-11i-2=13-11i$.

c) $(2-3i)^2 = 4-2\cdot2\cdot3i+(3i)^2=4-12i-9=-5-12i$.

d) $(4+5i)^2 = 16+2\cdot4\cdot5i+(5i)^2=16+40i-25=-9+40i$.

5. Calcula:

a) $\dfrac{1-2i}{2-2i}$; b) $\dfrac{3+2i}{5-3i}$; c) $\dfrac{4}{12-2i}$; d) $\dfrac{4-2i}{2i}$; e) $\dfrac{5i}{4+3i}$; f) $\dfrac{12+2i}{1+6i}$.

Solución:

a) $$\frac{1-2i}{2-2i} = \frac{(1-2i)\cdot(2+2i)}{(2-2i)\cdot(2+2i)}=\frac{2+2i-4i-4i^2}{4-4i^2}=\frac{2-2i+4}{4+4}=\frac{6-2i}{8}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}i.$$

b) $$\frac{3+2i}{5-3i} = \frac{(3+2i)\cdot(5+3i)}{(5-3i)\cdot(5+3i)}=\frac{15+9i+10i+6i^2}{25+9}=\frac{9+19i}{34}=\frac{9}{34}-\frac{19}{34}i.$$

c) $$\frac{4}{12-2i} = \frac{4\cdot(12+2i)}{(12-2i)\cdot(12+2i)}=\frac{48+8i}{12^2+4}=\frac{48}{148}+\frac{8}{148}i=\frac{12}{37}+\frac{2}{37}i.$$

d) $$\frac{4-2i}{2i} = \frac{(4-2i)\cdot i}{2i\cdot i}=\frac{4i-2i^2}{2i^2}=\frac{4i+2}{-2}=-2i-1=-1-2i.$$

e) $$\frac{5i}{4+3i} = \frac{5i\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)}=\frac{20i-15i^2}{4^2+3^2}=\frac{15+20i}{25}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i.$$

f) $$\frac{12+2i}{1+6i} = \frac{(12+2i)\cdot(1-6i)}{(1+6i)\cdot(1-6i)}=\frac{12-72i+2i-12i^2}{1+36}=\frac{24-70i}{37}=\frac{24}{37}-\frac{70}{37}i.$$

6. Calcula simplificando el resultado:

a) $\frac{2-4i}{1+3i}+\frac{4}{i}$; b) $\frac{1-2i}{2-2i}\cdot\frac{2-i}{3i}$; c) $\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{2-i}{3i}$; d) $\frac{(2+6i)^2}{2i}$.

Solución:

a) $\frac{2-4i}{1+3i}+\frac{4}{i}$ = (sumando como fracciones ordinarias) = $\frac{(2-4i)\cdot i}{(1+3i)\cdot i}+\frac{4\cdot(1+3i)}{(1+3i)\cdot i}=$

$$=\frac{(8+14i)\cdot(-3-i)}{(-3+i)\cdot(-3-i)}=\frac{-24-8i-42i-14i^2}{9-i^2}=\frac{-10-50i}{10}=-1-5i.$$

b) $\frac{1-2i}{2-2i}\cdot\frac{2-i}{3i}=\frac{(1-2i)\cdot(2-i)}{(2-2i)\cdot 3i}=\frac{2-i-4i+2i^2}{6i-6i^2}=\frac{-5i}{6+6i}=$

$$=\frac{-5i\cdot(6-6i)}{(6+6i)\cdot(6-6i)}=\frac{-30i+30i^2}{6^2+6^2}=\frac{-30-30i}{72}=-\frac{5}{12}-\frac{5}{12}i.$$

c) $\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{2-i}{3i}=\frac{2\cancel{i}\cdot(2-i)}{(1-i)\cdot 3\cancel{i}}=\frac{2\cdot(2-i)}{(1-i)\cdot 3}=\frac{4-2i}{3-3i}=\frac{(4-2i)\cdot(3+3i)}{(3-3i)\cdot(3+3i)}=\frac{12+12i-6i-6i^2}{3^2+3^2}=\frac{18+6i}{18}=1+\frac{1}{3}i.$

d) $\frac{(2+6i)^2}{2i}=\frac{4+24i+36i^2}{2i}=\frac{-32+24i}{2i}=\frac{(-32+24i)\cdot i}{2i\cdot i}=\frac{-32i+24i^2}{2i^2}=\frac{-24-32i}{-2}=12+16i.$

7. Teniendo en cuenta el valor de las potencias de i simplifica la expresión:

a) $\frac{-2\cdot i^{18}+i^{99}}{2+i^{40}}$; b) $\frac{3\cdot i^{50}+i^{239}}{1+i^{193}}$.

Solución:

Recuerda que: $i^{4n}=i^0=1$; $i^{4n+1}=i^1=i$; $i^{4n+2}=i^2=-1$; $i^{4n+3}=i^3=-i$.

Por tanto:

a) $\frac{-2\cdot i^{18}+i^{99}}{2+i^{40}}=\frac{-2\cdot i^{4\cdot 4+2}+i^{4\cdot 24+3}}{2+i^{4\cdot 10}}=\frac{-2\cdot i^2+i^3}{2+1}=\frac{-2\cdot(-1)-i}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i.$

b) $\frac{3\cdot i^{50}+i^{239}}{1+i^{193}}=\frac{3\cdot i^{4\cdot 12+2}+i^{4\cdot 59+3}}{1+i^{1\cdot 48+1}}=\frac{3\cdot i^2+i^3}{1+i}=\frac{-3-i}{1+i}=$

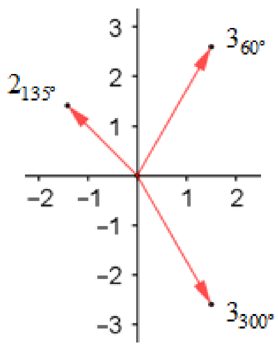
$$=\frac{(-3-i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{-3+3i-i+i^2}{1+1}=\frac{-4+2i}{2}=-2+i.$$

8. Expresa en sus distintas formas los siguientes números complejos:

a) $3\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$; b) $3\cdot(\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ)$; c) $2\cdot(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$.

Haz su representación gráfica.-

Solución:



a) $3\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\to$ en forma polar: 3_{60°.

En forma binómica: $3\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=3\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

b) $3\cdot(\cos 60^\circ-i\sin 60^\circ)$ es el conjugado de $3\cdot(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$.

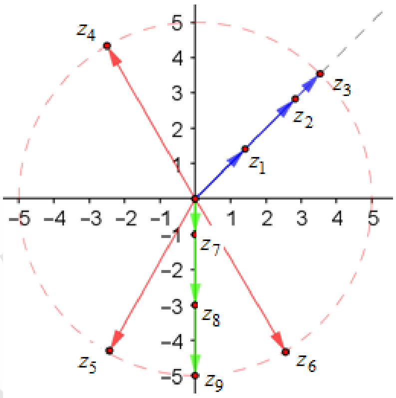
Sus otras formas son: $3_{-60^\circ} = 3_{300^\circ}$; $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

c) Forma polar: 2_{135°.

Binómica: $2\cdot(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

9. Indica tres números complejos que cumplan la siguiente condición:
a) Su argumento es 45º; b) Su módulo es 5; c) Su argumento es 270º.
Represéntalos gráficamente.

Solución:
Hay infinitas posibilidades. Pueden ser los siguientes:



a) $z_1 = 2_{45^\circ}$; $z_2 = 4_{45^\circ}$; $z_3 = 5_{45^\circ}$. Observa que sus afijos están sobre la semirrecta “positiva” de ecuación $y = x$.

b) $z_4 = 5_{120^\circ}$; $z_5 = 5_{240^\circ}$; $z_6 = 5_{300^\circ}$. Observa que sus afijos están en la circunferencia con centro en $O(0, 0)$ y radio 5.

c) $z_7 = 1_{270^\circ}$; $z_8 = 3_{270^\circ}$; $z_9 = 5_{270^\circ}$. Observa que sus afijos están sobre el eje imaginario negativo.

10. Demuestra la fórmula del producto de números complejos en forma polar: $m_\alpha \cdot n_\beta = (m\cdot n)_{(\alpha+\beta)}$.

Solución:
Como $m_\alpha = m(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)$ y $n_\beta = n(\cos\beta + i\cdot\sin\beta) \Rightarrow$

$$m_\alpha \cdot n_\beta = (m(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha))\cdot(n(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)) = (m\cdot n)(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\cdot\sin\beta) =$$
$$= (m\cdot n)\left(\cos\alpha\cdot\cos\beta + i\cos\alpha\cdot\sin\beta + i\sin\alpha\cdot\cos\beta + i^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\right) =$$

(por $i^2 = -1$ y agrupando) $\rightarrow$

$$= (m\cdot n)\left((\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) + i(\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta)\right) =$$

(por las fórmulas de seno y coseno de una suma: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$) $\rightarrow$

$$= (m\cdot n)(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)) = (m\cdot n)_{(\alpha+\beta)}.$$

11. Demuestra la fórmula de la división de números complejos en forma polar: $\frac{m_\alpha}{n_\beta} = \left(\frac{m}{n}\right)_{(\alpha-\beta)}$.

Solución:
Como en el problema anterior:

$$\frac{m_\alpha}{n_\beta} = \frac{m(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)}{n(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)} = \left(\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)\cdot(\cos\beta - i\cdot\sin\beta)}{(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)\cdot(\cos\beta - i\cdot\sin\beta)} =$$

(operando y agrupando) $\rightarrow$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{\left(\cos\alpha\cdot\cos\beta - i\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta + i\cdot\sin\alpha\cos\beta - i^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\right)}{(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2} =$$

(por $i^2 = -1$ y aplicando las fórmulas: $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$); $(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1$) $\to$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) + i\cdot(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta)}{1} =$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)\cdot(\cos(\alpha-\beta) + i\cdot\sin(\alpha-\beta)) = \left(\frac{m}{n}\right)_{(\alpha-\beta)}.$$

12. Aplicando la fórmula de Moivre para $n = 2$ obtén las razones trigonométricas del ángulo doble: $\sin(2\alpha)$ y $\cos(2\alpha)$.

Solución:

Para $n = 2$, la fórmula de Moivre dice: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$.

Si la potencia se hace como un producto:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = (\cos\alpha)^2 + 2i\cos\alpha\cdot\sin\alpha + (i\sin\alpha)^2 = \underline{(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2} + i\underline{(2\cos\alpha\cdot\sin\alpha)}.$$

Luego,

$$(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 + i(2\cos\alpha\cdot\sin\alpha) = \underline{\cos(2\alpha)} + i\underline{\sin(2\alpha)}.$$

Igualando las partes real e imaginaria de los dos términos de la igualdad, se tiene que;

$$\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 \text{ y } \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$

que son las fórmulas buscadas.

13. Calcula y expresa el resultado final en forma binómica:

a) $2_{15^\circ}\cdot 5_{45^\circ}$;　　b) $5_{40^\circ}\cdot 4_{50^\circ}$;　　c) $8_{90^\circ} : 2_{120^\circ}$;　　d) $\dfrac{10_{300^\circ}}{2_{60^\circ}}$.

Solución:

a) $2_{15^\circ}\cdot 5_{45^\circ} = (2\cdot 5)_{(15^\circ+45^\circ)} = 10_{60^\circ} \to 10_{60^\circ} = 10\cdot(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 10\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + 5\sqrt{3}i$.

b) $5_{40^\circ}\cdot 4_{50^\circ} = (5\cdot 4)_{(40^\circ+50^\circ)} = 20_{90^\circ} = 20i$.

c) $8_{90^\circ} : 2_{120^\circ} = (8:2)_{(90^\circ-120^\circ)} = 4_{(-30^\circ)} = 4_{330^\circ} = 4\cdot(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i$.

d) $\dfrac{10_{300^\circ}}{2_{60^\circ}} = 5_{240^\circ} \to 5_{240^\circ} = 5\cdot(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = 5\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$.

14. Teniendo en cuenta que $1_{45^\circ}\cdot 1_{30^\circ} = 1_{75^\circ}$ y que $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ}$ halla los valores de:

a) sen 75º y cos 75º;　　b) sen 15º y cos 15º.

Solución:

a) Por una parte se tiene que:

$$1_{45^\circ}\cdot 1_{30^\circ} = (\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)\cdot(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i + \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}i^2 = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} + \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}i.$$

Por otra parte, $1_{45^\circ}\cdot 1_{30^\circ} = 1_{75^\circ} = \boxed{\cos 75^\circ} + i\boxed{\sin 75^\circ}$.

Igualando las partes reales e imaginarias de ambas expresiones se obtiene:

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

b) Por una parte se tiene que:

$$1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = \frac{\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)i}{1} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} + \left(\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\right)i.$$

Por otra parte, $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ} = \boxed{\cos 15^\circ} + i\,\boxed{\sin 15^\circ}$.

Igualando las partes reales e imaginarias de ambas expresiones se obtiene:

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};\ \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

<u>Nota</u>: Idéntico resultado se obtuvo en el Tema 6 (Ejercicio 2) por otro procedimiento.

15. Cuando se multiplica un número complejo $z = m_\alpha$ por $i = 1_{90^\circ}$, $m_\alpha \cdot 1_{90^\circ} = m_{(\alpha+90^\circ)}$, se produce un giro de 90º, con centro en *O*, del vector representante de *z*. Si el triángulo de vértices *A*(2, 1), *B*(1, 3) y *C*(–2, –2) se gira 90º con centro en *O*, ¿cuáles serían sus vértices?

<u>Solución</u>:

Los puntos *A*(2, 1), *B*(1, 3) y *C*(–2, –2) son los afijos de los números complejos:

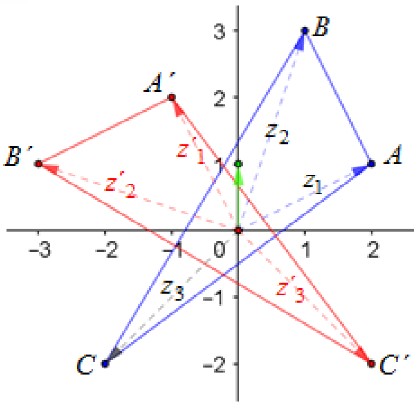
$$z_1 = 2+i;\ z_2 = 1+3i;\ z_3 = -2-2i.$$

Multiplicando esos números complejos por *i* se obtienen los vértices *A´*, *B´* y *C´* del triángulo girado 90º.

$$A' \to z'_1 = z_1 \cdot i = (2+i)\cdot i = 2i + i^2 = -1+2i;$$

$$B' \to z'_2 = z_2 \cdot i = (1+3i)\cdot i = i + 3i^2 = -3+i;$$

$$C' \to z'_3 = z_3 \cdot i = (-2-2i)\cdot i = -2i - 2i^2 = 2-2i.$$



16. Aplicando el desarrollo de un binomio y el valor de las sucesivas potencias de *i*, calcula:

a) $(3+2i)^3$; b) $(1+i)^4$; c) $(3-2i)^5$; d) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6$.

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } (3+2i)^3 = \binom{3}{0}3^3 + \binom{3}{1}3^2\cdot(2i) + \binom{3}{2}3\cdot(2i)^2 + \binom{3}{3}(2i)^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2\cdot(2i) + 3\cdot 3\cdot 4i^2 + 8i^3 =$$

$$= 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3 = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i.$$

$$\text{b) } (1+i)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3\cdot i + \binom{4}{2}1^2\cdot i^2 + \binom{4}{3}1\cdot i^3 + \binom{4}{4}i^4 =$$

$$= 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

c) $(3-2i)^5 = \binom{5}{0}\cdot 3^5 - \binom{5}{1}\cdot 3^4\cdot(2i)+\binom{5}{2}\cdot 3^3(2i)^2-\binom{5}{3}\cdot 3^2\cdot(2i)^3+\binom{5}{4}\cdot 3(2i)^4-\binom{5}{5}\cdot(2i)^5 =$

$= 243-5\cdot 81\cdot(2i)+10\cdot 27\cdot 4i^2-10\cdot 9\cdot 8i^3+5\cdot 3\cdot 16i^4-32i^5 =$

$= 243-810i-1080+720i+240-32i=-597-122i$.

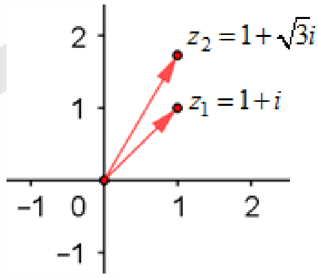
d) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6$ = (en el desarrollo se omite el factor 1) =

$= \binom{6}{0}+\binom{6}{1}\cdot\left(\sqrt{3}i\right)+\binom{6}{2}\cdot\left(\sqrt{3}i\right)^2+\binom{6}{3}\cdot\left(\sqrt{3}i\right)^3+\binom{6}{4}\cdot\left(\sqrt{3}i\right)^4+\binom{6}{5}\cdot\left(\sqrt{3}i\right)^5+\binom{6}{6}\cdot\left(\sqrt{3}i\right)^6 =$

$= 1+6\cdot\sqrt{3}i+15\cdot 3i^2+20\cdot 3\sqrt{3}i^3+15\cdot 9i^4+6\cdot 9\sqrt{3}i^5+27i^6 =$

$= 1+6\cdot\sqrt{3}i-45-60\sqrt{3}i+135+54\sqrt{3}i-27=64$.

17. Expresa en forma polar los números complejos $z_1=1+i$ y $z_2=1+\sqrt{3}i$. Calcula nuevamente las potencias $(1+i)^4$ y $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6$ del problema anterior.



<u>Solución</u>:

a) Para $z_1=1+i$ se tiene:

$$m_1=|z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2};\ \alpha_1=\arctan\frac{1}{1}=45^{\circ}.$$

Por tanto, $z_1=1+i=\sqrt{2}_{45^{\circ}}$.

Con esto,

$$(1+i)^4=\left(\sqrt{2}_{45^{\circ}}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4_{(4\cdot 45^{\circ})}=4_{180^{\circ}}==4\cdot\left(\cos 180^{\circ}+i\sin 180^{\circ}\right)=4\cdot(-1)=-4.$$

b) Si $z_2=1+\sqrt{3}i \Rightarrow m_2=|z_2|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2;\ \alpha_2=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=60^{\circ}$.

Por tanto, $z_2=1+\sqrt{3}i=2_{60^{\circ}}$.

Luego, $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6=\left(2_{60^{\circ}}\right)^6=2^6_{(6\cdot 60^{\circ})}=64_{360^{\circ}}=64\cdot\left(\cos 360^{\circ}+i\sin 360^{\circ}\right)=64\cdot(1)=64$.

18. Calcula y expresa el resultado final en forma binómica:

a) $\left(2_{30^{\circ}}\right)^4$; b) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$; c) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^7$; d) $\left(\sqrt{5}i\right)^4$.

<u>Solución</u>:

a) $\left(2_{30^{\circ}}\right)^4=2^4_{(4\cdot 30^{\circ})}=16_{120^{\circ}}=16\cdot\left(\cos 120^{\circ}+i\sin 120^{\circ}\right)=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}i$.

b) Si $z=1-\sqrt{3}i$: $m=|z|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2;\ \alpha=\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)=300^{\circ}$.

Por tanto, $z=1-\sqrt{3}i=2_{300^{\circ}}$.

Luego,

$$\left(1-\sqrt{3}i\right)^5=\left(2_{300^{\circ}}\right)^5=2^5_{(5\cdot 300^{\circ})}=32_{1500^{\circ}}=32\cdot\left(\cos 1500^{\circ}+i\sin 1500^{\circ}\right)=32\cdot\left(0,5+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16+16\sqrt{3}i$$

c) Para $z = 2\sqrt{3} + 2i$: $m = |z| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$; $\alpha = \arctan\left(\dfrac{2}{2\sqrt{3}}\right) = 30^{\circ}$.

Por tanto, $z = 2\sqrt{3} + 2i = 4_{30^{\circ}}$.

Luego,

$$\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^7 = \left(4_{30^{\circ}}\right)^7 = 4^7{}_{(7\cdot 30^{\circ})} = 4^7{}_{210^{\circ}} = 4^7\cdot\left(\cos 210^{\circ} + i\sin 210^{\circ}\right) =$$

$$= 6384\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -8192\sqrt{3} - 8192i.$$

d) $\left(\sqrt{5}i\right)^4 = \left(\sqrt{5}_{90^{\circ}}\right)^4 = \left(\sqrt{5}\right)^4{}_{(4\cdot 90^{\circ})} = 25_{360^{\circ}} = 25$.

19. Calcula:

a) $\sqrt[3]{64}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$; c) $\sqrt[4]{i}$; d) $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}+8i}$; e) $\sqrt[6]{-1}$; f) $\sqrt{2\sqrt{3}+2i}$.

Representa gráficamente las soluciones de los casos b) y e).

Solución:

Recuerda:

$$\sqrt[n]{a+bi} = (a+bi)^{\frac{1}{n}} = \left(m_{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(m_{\alpha + k\cdot 360^{\circ}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(m^{\frac{1}{n}}\right)_{\left(\frac{\alpha + k\cdot 360^{\circ}}{n}\right)} = \left(\sqrt[n]{m}\right)_{\left(\frac{\alpha + k\cdot 360^{\circ}}{n}\right)}.$$

a) El número 64 escrito en forma polar es: $64 = 64_{0^{\circ}} = 64_{k\cdot 360^{\circ}}$.

Luego:

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\left(64_{k\cdot 360^{\circ}}\right)} = \sqrt[3]{64}_{\left(\frac{k\cdot 360^{\circ}}{3}\right)} = 4_{\left(\frac{k\cdot 360^{\circ}}{3}\right)}.$$

Dando a *k* los valores 0, 1 y 2 se obtienen las raíces: $z_1 = 4_{0^{\circ}}$, $z_2 = 4_{120^{\circ}}$ y $z_3 = 4_{240^{\circ}}$.

b) El número $2-2i$ tiene: módulo $m = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$; y argumento $\alpha = \arctan\left(\dfrac{-2}{2}\right) = 315^{\circ}$.

Por tanto, $2 - 2i = \sqrt{8}_{315^{\circ} + k\cdot 360^{\circ}}$.

Luego:

$$\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{(315^{\circ} + k\cdot 360^{\circ})}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}_{\left(\frac{315^{\circ} + k\cdot 360^{\circ}}{3}\right)} = \sqrt{2}_{\left(\frac{315^{\circ} + k\cdot 360^{\circ}}{3}\right)}.$$

Dando a *k* los valores 0, 1 y 2 se obtienen las raíces: $z_1 = \sqrt{2}_{105^{\circ}}$, $z_2 = \sqrt{2}_{225^{\circ}}$ y $z_3 = \sqrt{2}_{345^{\circ}}$.

→ Observa que $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$.

c) La forma polar de *i* es: $i = 1_{90^{\circ} + k\cdot 360^{\circ}}$, luego:

$$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{(90^{\circ} + k\cdot 360^{\circ})}} = 1_{\left(\frac{90^{\circ} + k\cdot 360^{\circ}}{4}\right)}.$$

Dando a *k* los valores 0, 1, 2 y 3 se obtienen las raíces:

$z_1 = 1_{22,5^{\circ}}$, $z_2 = 1_{112,5^{\circ}}$, $z_3 = 1_{202,5^{\circ}}$ y $z_4 = 1_{292,5^{\circ}}$.

d) El número $-8\sqrt{3} + 8i$ tiene:

módulo $m=\sqrt{\left(-8\sqrt{3}\right)^2+8^2}=\sqrt{256}=16$; y argumento $\alpha=\arctan\left(\frac{8}{-8\sqrt{3}}\right)=150^\circ$.

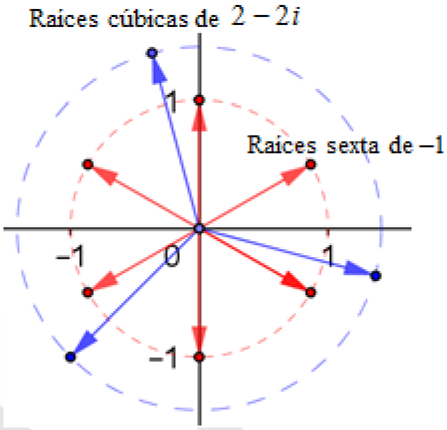
Por tanto, $-8\sqrt{3}+8i=16_{150^\circ+k\cdot360^\circ}$.

Luego,

$$\sqrt[4]{-8\sqrt{3}+8i}=\sqrt[4]{16_{150^\circ+k\cdot360^\circ}}=\sqrt[4]{16}_{\left(\frac{150^\circ+k\cdot360^\circ}{4}\right)}=2_{\left(\frac{150^\circ+k\cdot360^\circ}{4}\right)}.$$

Dando a k los valores 0, 1, 2 y 3 se obtienen las raíces:

$z_1=2_{37,5^\circ}$, $z_2=2_{127,5^\circ}$, $z_3=2_{217,5^\circ}$ y $z_4=2_{307,5^\circ}$.



e) La forma polar de -1 es: $-1=1_{180^\circ+k\cdot360^\circ}$, luego:

$$\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{1_{(180^\circ+k\cdot360^\circ)}}=1_{\left(\frac{180^\circ+k\cdot360^\circ}{6}\right)}.$$

Dando a k los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5 se obtienen las raíces:

$z_1=1_{30^\circ}$, $z_2=1_{90^\circ}$, $z_3=1_{150^\circ}$, $z_4=1_{210^\circ}$,

$z_5=1_{270^\circ}$ y $z_6=1_{330^\circ}$.

f) Como $z=2\sqrt{3}+2i=4_{30^\circ}=4_{30^\circ+k\cdot360^\circ}$, se tendrá que

$$\sqrt{2\sqrt{3}+2i}=\sqrt{4_{(30^\circ+k\cdot360^\circ)}}=2_{\left(\frac{30^\circ+k\cdot360^\circ}{2}\right)}.$$

Dando a k los valores 0 y 1 se obtienen las raíces: $z_1=2_{15^\circ}$ y $z_2=2_{195^\circ}$.

20. Calcula las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+9=0$; b) $x^2-2x+5=0$; c) $x^2+2x+10=0$; d) $x^2-4x+13=0$.

Solución:

a) $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\sqrt{-9} \Rightarrow x=\pm 3i$.

b) Aplicando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado:

$$x^2-2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2}=\begin{cases}1+2i\\1-2i\end{cases}.$$

c) $$x^2+2x+10=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-2\pm 6i}{2}=\begin{cases}-1-3i\\-1+3i\end{cases}.$$

d) $$x^2-4x+13=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot13}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=\begin{cases}2-3i\\2+3i\end{cases}.$$

Observaciones:

1. Las raíces complejas de una ecuación de segundo grado son conjugadas.
2. En general, si una ecuación con coeficientes reales tiene a un número complejo por raíz, también es raíz el conjugado de dicho número.

21. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{-z+3iz-12}{z}=3z+3i-1$; b) $2z^2+3iz+2=0$.

<u>Solución</u>:

a) Operando se tiene:

$$\frac{-z+3iz-12}{z}=3z+3i-1 \Rightarrow -z+3iz-12=3z^2+3iz-z \Rightarrow -12=3z^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z^2=-4 \Rightarrow z=\sqrt{-4} \Rightarrow z=\pm 2i.$$

b) Aplicando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado:

$$2z^2+3iz+2=0 \Rightarrow z=\frac{-3i\pm\sqrt{(3i)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{-3i\pm\sqrt{-9-4\cdot 2\cdot 2}}{4}=\frac{-3i\pm\sqrt{-25}}{4}=\frac{-3i\pm 5i}{4}\begin{cases}-2i\\ i/2\end{cases}.$$

22. Halla una ecuación de segundo grado que tenga por raíces $z_1=2-i$ y $z_2=2+i$.

<u>Solución</u>:

Vale cualquier expresión del tipo $k\cdot(z-(2-i))\cdot(z-(2+i))=0$, con $k\neq 0$.

Haciendo k = 1, multiplicando y simplificando, se obtiene:

$$(z-(2-i))\cdot(z-(2+i))=0 \Rightarrow z^2-2z-iz-2z+4+2i+iz-2i-i^2=0 \Rightarrow z^2-4z+5=0.$$

23. Encuentra una ecuación que tenga por raíces $z_1=1+2i$, $z_2=1-2i$, $z_3=-1$ y $z_4=2$.

<u>Solución</u>:

Vale cualquier expresión del tipo $k\cdot(z-(1+2i))\cdot(z-(1-2i))(z+1)\cdot(z-2)=0$, con $k\neq 0$.

Haciendo k = 1, multiplicando y simplificando, se obtiene:

$$(z-(1+2i))\cdot(z-(1-2i))(z+1)\cdot(z-2)=0 \Rightarrow$$
$$\left(z^2-z+2iz-z+1-2i-2iz+2i-4i^2\right)\cdot\left(z^2-z-2\right)=0 \Rightarrow$$
$$\left(z^2-2z+5\right)\cdot\left(z^2-z-2\right)=0 \Rightarrow z^4-3z^3+5z^2-z-10=0.$$

24. Halla las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:

a) $x^4+10x^2+9=0$; b) $z^4+5z^2+4=0$.

En cada caso, comprueba el resultado para una de las soluciones.

<u>Solución</u>:

Son ecuaciones bicuadradas. Se hace el cambio $x^2=t$ en a) y $z^2=t$ en b).

a) $x^4+10x^2+9=0 \to t^2+10t+9=0 \Rightarrow t=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\dfrac{-10\pm 8}{2}=\begin{cases}-9\\ -1\end{cases}$.

Para $t=-9 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x=\sqrt{-9}=\begin{cases}-3i\\ 3i\end{cases}$.

Para $t=-1 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1}=\begin{cases}-i\\ i\end{cases}$.

Puede comprobarse, por ejemplo, que $x=-3i$ es solución.

En efecto, sustituyendo en $x^4+10x^2+9=0$ se tiene:

$$(-3i)^4+10(-3i)^2+9=81i^4+10\cdot 9i^2+9=81-90+9=0.$$

b) $z^4+5z^2+4=0 \to t^2+5t+4=0 \Rightarrow t=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\dfrac{-5\pm 3}{2}=\begin{cases}-4\\-1\end{cases}$.

Para $t=-4 \Rightarrow z^2=-4 \Rightarrow z=\sqrt{-4}=\begin{cases}-2i\\2i\end{cases}$. Para $t=-1 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z=\sqrt{-1}=\begin{cases}-i\\i\end{cases}$.

Puede comprobarse, por ejemplo, que $z=2i$ es solución.

En efecto, sustituyendo en $z^4+5z^2+4=0$ se tiene:

$$(2i)^4+5(2i)^2+4=16i^4+5\cdot 4i^2+4=16-20+4=0.$$

25. Halla las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:

a) $x^3+4x=0$; b) $x^3-2x^2+4x-8=0$.

En cada caso, comprueba el resultado para una de las soluciones complejas.

Solución:

a) Sacando factor común: $x^3+4x=0 \to x\left(x^2+4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x^2+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=\pm 2i\end{cases}$.

b) Se busca una raíz entera; si la hay, será divisor del término independiente, de 8.

Vale x = 2, pues: $2^3-2\cdot 2^2+4\cdot 2-8=0 \Rightarrow (x-2)$ es un factor de la ecuación.

Dividendo por Ruffini:

$$x^3-2x^2+4x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+4\right)=0$$

$\to$ Las otras soluciones son las de $x^2+4=0$, que son $x=-2i$ y $x=2i$.