Solución de los Problemas Propuestos

1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 y 9 cm. Halla las razones trigonométricas de sus ángulos agudos. ¿Cuánto valen esos ángulos?

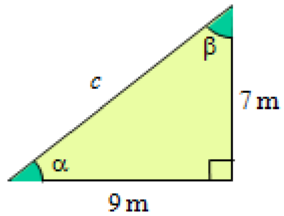
Solución:

$$c=\sqrt{7^2+9^2}=\sqrt{130}\approx 11,40\,.$$

$$\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{130}}\approx 0,6139 \Rightarrow \alpha=\arcsin 0,6139=37,87^{\circ} \to \beta = 52,13^{\circ}.$$

$$\cos\alpha=\frac{9}{\sqrt{130}}\approx 0,7894\,.$$

$$\tan\alpha=\frac{7}{9}=0,7778\,.$$



Como α y β son complementarios:

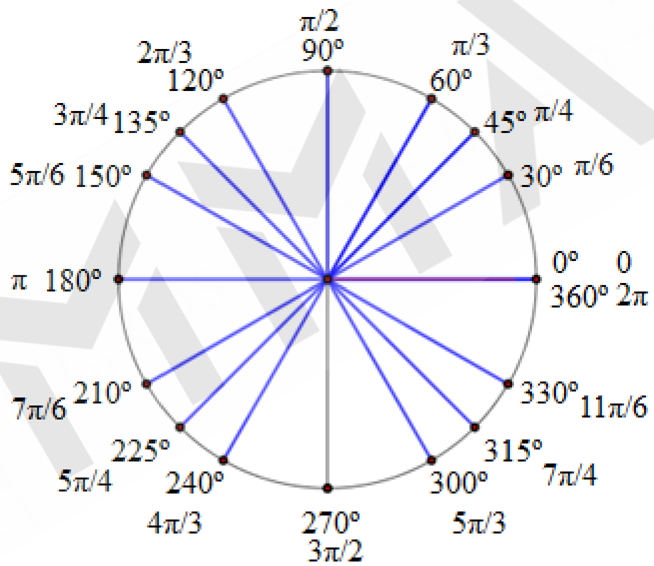
sin β = cos α = 0,7894; cos β = sin α = 0,6139; tan β = 9/7 = 1,2857.

2. Expresa en radianes los ángulos de:

0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º y 360º.

Solución:

La equivalencia es 180º = π radianes. En el dibujo se indican todas las correspondencias.



3. Expresa en grados los radianes: π/6; 1,2; 3π/4; 5π/4; 2π/3; 3π; –2π/5; –3π.

Solución:

La equivalencia es π radianes = 180º ⇒ 1 radian ≈ 57,30º.

Luego:

π/6 = 30º; 1,2 rad = 68,75º; 3π/4 = 135º; 5π/4 = 225º;
2π/3 = 120º; 3π = 540º; –2π/5 = –72º; –3π = –540º.

4. Con la calculadora en el modo DEG halla:

a) sen 80º b) cos 33º c) tag 125º d) sen 220º e) tag 26º

Solución:

a) sen 80º = 0,9848; b) cos 33º = 0,8387; c) tag 125º = –1,4281;
d) sen 220º = –06428; e) tag 26º = 0,4877.

5. Con la calculadora en el modo RAD halla:

a) cos 1; b) sen 0,5; c) tag (π/5); d) sen (5π/2); e) cos (–3π).

Solución:

a) cos 1 = 0,5404; b) sen 0,5 = 0,4794; c) tag (π/5) = 0,7265;
d) sen (5π/2) = 1; e) cos (–3π) = –1.

6. Utilizando la calculadora, halla en el modo que proceda, las razones trigonométricas que se indican:

a) sin 30º; b) cos 240º; c) tan 120º; d) tan (2π/3); e) sin 1,5;
e) sin (π/3); f) cos (5π/3); g) cos 0,8; h) tan (π/2); i) sin 270º.

Solución:

Si el ángulo se da en grados hay que aplicar el modo DEG; si se da en radianes, el modo RAD.
Se obtiene:

a) sin 30º =0,5; b) cos 240º = –0,5; c) tan 120º = –1,73; d) tan (2π/3) =–1,73;
e) sin 1,5 = 0,997; e) sin (π/3) = 0,866; f) cos (5π/3) = 0,5; g) cos 0,8 = 0,697;
h) tan (π/2) = +∞ → no está definida; i) sin 270º = –1.

7. Sabiendo que sen α = 0,4 y que 0º < α < 90º, halla las demás razones trigonométricas de α.

Solución:

Como α está en el primer cuadrante todas sus razones trigonométricas son positivas.

Por $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1-0,16 = 0,84 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{0,84} \approx 0,9165$ (sol. positiva).

$\to \tan\alpha = \dfrac{0,4}{\sqrt{0,84}} = 0,4364$.

Sus inversas son:

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{0,4} = 2,5;\quad \sec\alpha = \frac{1}{0,9165} = 1,0911;\quad \text{cotan}\ \alpha = \frac{1}{0,4364} = 2,2915.$$

8. Si $\sin\alpha = -0,3$ y α es un ángulo del cuarto cuadrante determina sus otras razones trigonométricas.

Solución:

De $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-(-0,3)^2} = \pm\sqrt{1-0,09} = \pm\sqrt{0,91} = \pm 0,9539$.

Como el ángulo está en el cuarto cuadrante el coseno es positivo: $\cos\ \alpha = 0,9539$; luego:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{-0,3}{0,9539} = -0,3145.$$

Las razones inversas son:

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -3,3333;\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 1,0483 \text{ y } \text{cotan}\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -3,1797.$$

9. Sabiendo que cos α = –0,5, α ∈ (90º, 180º), halla las demás razones trigonométricas de α.

Solución:

Como α está en el segundo cuadrante su seno es positivo; su coseno y tangente, negativos.

Por $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-(-0,5)^2 = 0,75 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{0,75} \approx 0,8660$ (sol. positiva).

$\to \tan\alpha = \dfrac{0,8660}{-0,5} = -1,7321$.

Sus inversas son:

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{0,75}} = 1,1547;\quad \sec\alpha = \frac{1}{-0,5} = -2;\quad \text{cotan}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-0,5}{\sqrt{0,75}} = -0,5774.$$

10. Sabiendo que tag α = 4,01, 180º < α < 270º, halla las demás razones trigonométricas de α.
Solución:
Como α está en el tercer cuadrante su seno y coseno son negativos.
Por $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+4,01^2}=0,0585\Rightarrow\cos\alpha=-\sqrt{0,0585}\approx-0,2420$.
$\to\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha=-0,2420\cdot4,01=-0,9704$.
Sus inversas son:

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{-0,9704}=-1,0305;\ \sec\alpha=\frac{1}{-0,2420}=-4,1322;\ \operatorname{cotan}\alpha=\frac{1}{4,01}=0,2494.$$

11. Si $\tan\alpha=-1,5$ y $90^\circ<\alpha<180^\circ$ determina las restantes razones trigonométricas.
Solución:
De la fórmula $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha^{(*)}\Rightarrow\sec\alpha=\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\pm\sqrt{1+(-1,5)^2}=\pm\sqrt{3,25}=\pm1,8028$.
Como el ángulo está en el segundo cuadrante el coseno y la secante son negativos.
Es decir:

$$\sec\alpha=-1,8028\to\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{-1,8028}=-0,5547;\ \operatorname{cotan}\alpha=\frac{1}{-1,5}=-1,2019.$$

Luego:

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\tan\alpha=-0,5547\cdot(-1,5)\approx0,8321;\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=1,2018;$$

(*) La identidad $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ se comprueba como sigue:

$$1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$$

12. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 30º, 60º, 120º, 210º y 300º. Obtén sus razones trigonométricas a partir de las del ángulo de 30º.
Solución:
En todos los casos se puede construir un triángulo rectángulo idéntico, salvo giros.
El valor del seno viene dado por la medida el cateto vertical, con signo positivo si el triángulo queda por encima del eje horizontal; y negativo en caso contrario.
El valor del coseno es la medida el cateto horizontal, con signo positivo si el triángulo queda a la derecha del eje vertical; y negativo en caso contrario,
La tangente es el cociente de ambos valores: tangente = seno/coseno.
Con esto:

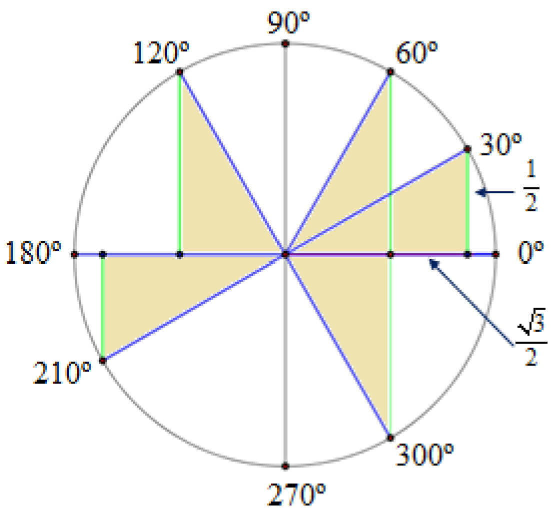
$$\sin30^\circ=\frac{1}{2};\cos30^\circ=\frac{\sqrt3}{2};\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt3}.$$

$$\sin60^\circ=\frac{\sqrt3}{2};\cos60^\circ=\frac{1}{2};\tan60^\circ=\sqrt3.$$

$$\sin120^\circ=\frac{\sqrt3}{2};\cos120^\circ=-\frac{1}{2};\tan120^\circ=-\sqrt3.$$

$$\sin210^\circ=-\frac{1}{2};\cos210^\circ=-\frac{\sqrt3}{2};\tan210^\circ=\frac{1}{\sqrt3}.$$

$$\sin300^\circ=-\frac{\sqrt3}{2};\cos300^\circ=\frac{1}{2};\tan300^\circ=-\sqrt3.$$



13. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 45º, 135º, 225º y 315º. Obtén sus razones trigonométricas a partir de las del ángulo de 45º.

Solución:

En todos los casos se puede construir un triángulo rectángulo idéntico, salvo giros.

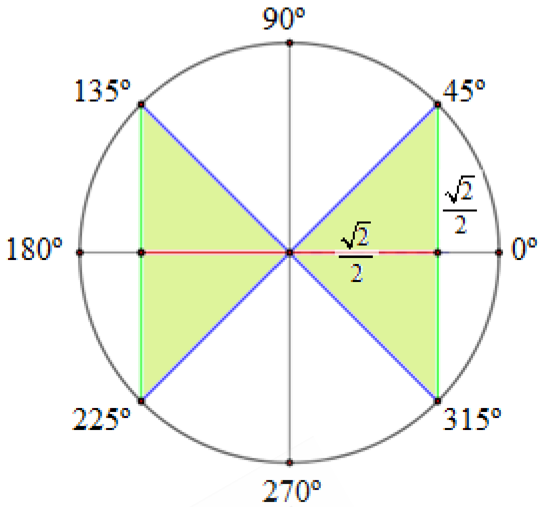
Aplicando el mismo razonamiento que en el problema anterior, se tendrá:

$$\sin 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2};\cos 45^o=\frac{\sqrt{2}}{2};\tan 45^o=1.$$

$$\sin 135^o=\frac{\sqrt{2}}{2};\cos 135^o=-\frac{\sqrt{2}}{2};\tan 135^o=-1.$$

$$\sin 225^o=-\frac{\sqrt{2}}{2};\cos 225^o=-\frac{\sqrt{2}}{2};\tan 225^o=1.$$

$$\sin 315^o=-\frac{\sqrt{2}}{2};\cos 315^o=\frac{\sqrt{2}}{2};\tan 315^o=-1.$$



14. Halla con la calculadora los valores de x, entre 0º y 360º, que verifican:

a) $\sin x = 0{,}6$; b) $\sin x = -0{,}8$; c) $\cos x = 0{,}25$; d) $\tan x=-\sqrt{3}$.

Solución:

→ Hay que aplicar las razones trigonométricas inversa. En las calculadoras aparecen encima de las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, como **$\sin^{-1}$**, **$\cos^{-1}$** y **$\tan^{-1}$**.

La forma clásica de referirse a ellas es “arco seno” (arcsen o arcsin), “arco coseno” (arccos) y “arco tangente” (arctag o arctan).

Al hallar $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$, las calculadoras suelen dar el valor más cercano a 0º, tanto en positivo como en negativo. Entre 0º y 360º, en la primera vuelta, hay dos ángulos cuya razón trigonométrica es la misma.

a) $\sin x = 0{,}6 \Rightarrow x = \sin^{-1} 0{,}6 = \arcsin 0{,}6 \Rightarrow x = 36{,}87^o$; la otra solución es $x = 180^o - 36{,}87^o = 143{,}13^o$. Luego: $x=\begin{cases}36{,}87^o\\143{,}13^o\end{cases}$. (Se está redondeando a centésimas de grado).

b) $\sin x = -0{,}8 \Rightarrow x = \sin^{-1} (-0{,}8) = \arcsin (-0{,}8) \Rightarrow x = -53{,}13^o = 360^o - 53{,}13^o = 306{,}87^o$; la otra solución es $x = 180^o - (-53{,}13^o) = 233{,}13^o$. Luego: $x=\begin{cases}233.13^o\\306{,}87^o\end{cases}$. (Comprueba los resultados).

c) $\cos x = 0{,}25 \Rightarrow x = \cos^{-1} 0{,}25 = \arccos 0{,}25 \Rightarrow x = 75{,}52^o$; la otra solución es $x = -75{,}52^o = 360^o - 75{,}52^o = 284{,}48^o$. Luego: $x=\begin{cases}75{,}52^o\\284{,}48^o\end{cases}$. (Comprueba los resultados).

d) $\tan x=-\sqrt{3} \Rightarrow x=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=\arctan\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow x = -60^o = 360^o - 60^o = 300^o$; la otra solución es $x = -60^o + 180^o = 120^o$. Luego: $x=\begin{cases}120^o\\300^o\end{cases}$. (Comprueba los resultados).

15. Demuestra la fórmula $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

Solución:

Utilizando el mismo dibujo (y las mismas premisas) que en la página 6 de este tema se tiene:

$\cos(\alpha+\beta)=OF=OG-FG=OG-ED$.

En el triángulo *OCD*, se tiene:

OD = cos β; *CD* = sin β.

En el triángulo *ODG*,

$$\cos\alpha=\frac{OG}{OD}=\frac{OG}{\cos\beta}\Rightarrow OG=\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$

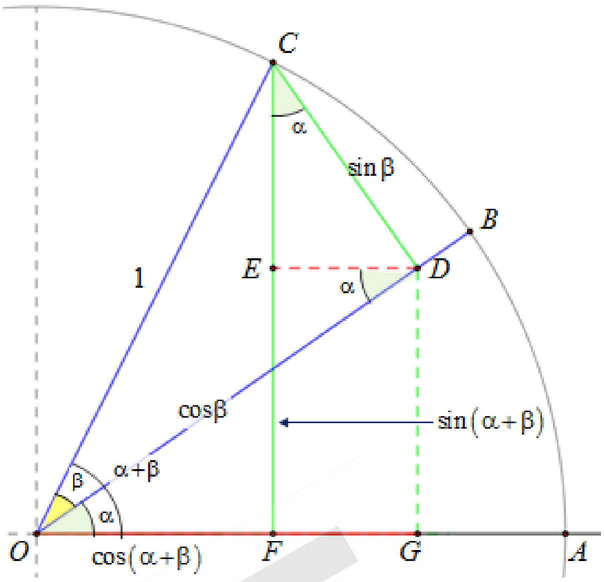
En el triángulo *ECD*,

$$\sin\alpha=\frac{ED}{CD}=\frac{ED}{\sin\beta}\Rightarrow ED=\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Por tanto, como

$$\cos(\alpha+\beta)=OG-ED\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$



16. A partir de las fórmulas de $\sin(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$ obtén la de $\tan(\alpha+\beta)$.

Solución:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\text{(dividiendo cada término por }\cos\alpha\cdot\cos\beta)$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

17. A partir de las fórmulas anteriores obtén las razones trigonométricas del ángulo doble.

Solución:

Si se hace β = α se tendrá:

$$\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\Rightarrow\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\sin\alpha;$$

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha\Rightarrow\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$$

$$\tan(2\alpha)=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}\Rightarrow\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

18. A partir de las fórmulas trigonométricas de sumas de ángulos y teniendo en cuenta que α – β = α + (–β) , obtén las fórmulas de las razones trigonométricas de la diferencia de ángulos: $\sin(\alpha-\beta)$; $\cos(\alpha-\beta)$ y $\tan(\alpha-\beta)$.

Solución:

Además de las fórmulas de las sumas hay que tener en cuenta que:

$\sin(-\beta)=-\sin\beta$; $\cos(-\beta)=\cos\beta$; $\tan(-\beta)=-\tan\beta$

Por tanto:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

19. Comprueba la identidad $\tan(\alpha+45^\circ)+\tan(\alpha-45^\circ)=2\tan(2\alpha)$.

Solución:

Aplicando las fórmulas de tangentes de suma y resta de ángulos y que tan 45º = 1:

$$\tan(\alpha+45^\circ)+\tan(\alpha-45^\circ)=\frac{\tan\alpha+\tan45^\circ}{1-\tan\alpha\cdot\tan45^\circ}+\frac{\tan\alpha-\tan45^\circ}{1+\tan\alpha\cdot\tan45^\circ}=$$

$$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}+\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{(\tan\alpha+1)^2-(\tan\alpha-1)^2}{(1-\tan\alpha)\cdot(1+\tan\alpha)}=\frac{\tan^2\alpha+2\tan\alpha+1-\left(\tan^2\alpha-2\tan\alpha+1\right)}{1-\tan^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=2\cdot\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=2\tan(2\alpha).$$

20. Demuestra las siguientes identidades:

a) $\tan\alpha=\dfrac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$; b) $\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1-\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$.

Solución:

a) Como $1+\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha$ (ver ejercicio 4) y $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \Rightarrow$

$$\frac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

b) Transformando la primera fracción:

$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\to$$ multiplicando ambos términos por

$$\cos\alpha-\sin\alpha\to\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{1-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1-\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}.$$

→ Si se parte de la segunda fracción, puede hacerse como sigue:

$$\frac{1-\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\to$$

(dividiendo cada término por cos *x*) = $\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$.

Nota: En los ejercicios de este tipo, que no siempre *salen* a la primera, hay que aprender a emprender diversos procedimientos.

21. Demuestra las fórmulas de transformación de sumas en productos:

a) $\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$; $\quad \sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$.

b) $\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$; $\quad \cos A-\cos B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$.

Solución:

a) Partiendo de las fórmulas:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \to [1]; \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \to [2]$$

Sumando miembro a miembro las fórmulas [1] + [2], se obtiene:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta \to [3]$$

Restando miembro a miembro las fórmulas [1] – [2], se obtiene:

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta \to [4]$$

Si, además, se hace $\begin{cases}\alpha+\beta=A\\ \alpha-\beta=B\end{cases}$, despejando α y β se deduce que: $\alpha=\frac{A+B}{2}$, $\beta=\frac{A-B}{2}$.

Luego, sustituyendo en [3] y [4] resultan las fórmulas buscadas:

$$[3]\to \sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}; \quad [4]\to \sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}.$$

b) Análogamente, partiendo de las formula de cosenos:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \to [5]; \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \to [6]$$

Sumando (restando) miembro a miembro las fórmulas [5] + [6] ([5] – [6]), se obtiene:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta \to [7]; \ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\cdot\sin\beta \to [8].$$

Y teniendo en cuanta que $\alpha=\frac{A+B}{2}$, $\beta=\frac{A-B}{2}$, puede escribirse:

$$[7]\to \cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}; \quad [8]\to \cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}.$$

22. Utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos y empleando las razones conocidas de los ángulos 0º, 30º,45º…, halla los valores de:

a) $\sin 165^{\circ}+\sin 105^{\circ}$; b) $\sin 165^{\circ}-\sin 105^{\circ}$; c) $\cos 75^{\circ}+\cos 15^{\circ}$; d) $\cos 105^{\circ}-\cos 15^{\circ}$.

Solución:

a) $\sin 165^{\circ}+\sin 105^{\circ}=2\cdot\sin\frac{165^{\circ}+105^{\circ}}{2}\cdot\cos\frac{165^{\circ}-105^{\circ}}{2} = 2\cdot\sin 135^{\circ}\cdot\cos 30^{\circ} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) $\sin 165^{\circ}-\sin 105^{\circ}=2\cdot\cos\frac{165^{\circ}+105^{\circ}}{2}\cdot\sin\frac{165^{\circ}-105^{\circ}}{2} = 2\cdot\cos 135^{\circ}\cdot\sin 30^{\circ} = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos 75^{\circ}+\cos 15^{\circ}=2\cdot\cos\frac{75^{\circ}+15^{\circ}}{2}\cdot\cos\frac{75^{\circ}-15^{\circ}}{2}=2\cdot\cos 45^{\circ}\cdot\cos 30^{\circ} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) $\cos 105^{\circ}-\cos 15^{\circ}=-2\cdot\sin\frac{105^{\circ}+15^{\circ}}{2}\cdot\sin\frac{105^{\circ}-15^{\circ}}{2}=-2\cdot\sin 60^{\circ}\cdot\sin 45^{\circ} = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\cos(2x)=-1$; b) $\sin\frac{x}{2}=-0,5$; c) $2\tan(3x)=4$; d) $4\sin x=2$.

Indica en cada caso las soluciones en el primer giro.

Solución:

a) $2\cos(2x)=-1 \Rightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=\arccos(-0,5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x=\begin{cases}120^\circ+360^\circ\cdot k\\ 240^\circ+360\cdot k\end{cases} \Rightarrow \text{(despejando } x\text{): } x=\begin{cases}60^\circ+180^\circ\cdot k\\ 120^\circ+180^\circ\cdot k\end{cases}.$$

Las soluciones de la primera vuelta son: 60º, 120º, 240º y 300º.

b) $\sin\frac{x}{2}=-0,5 \Rightarrow \frac{x}{2}=\arcsin(-0,5) \Rightarrow \frac{x}{2}=\begin{cases}-30^\circ+360^\circ\cdot k\\ 210^\circ+360\cdot k\end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2}=\begin{cases}330^\circ+360^\circ\cdot k\\ 210^\circ+360\cdot k\end{cases} \Rightarrow$

(despejando x): $x=\begin{cases}660^\circ+720^\circ\cdot k\\ 420^\circ+720^\circ\cdot k\end{cases}$. No hay soluciones en la primera vuelta.

c) $2\tan(3x)=4 \Rightarrow \tan(3x)=2 \Rightarrow 3x=\arctan 2 \Rightarrow 3x=63,43^\circ+k\cdot 180^\circ \Rightarrow x=21,14^\circ+k\cdot 60^\circ$.

Las soluciones en el primer giro son: 21,14º, 81,14º, 141,14º, 201,14º, 261,14º y 321,14º.

b) $4\sin x=2 \Rightarrow \sin x=0,5 \Rightarrow x=\arcsin(0,5) \Rightarrow x=\begin{cases}30^\circ+360^\circ\cdot k\\ 150^\circ+360\cdot k\end{cases}$.

Las soluciones de la primera vuelta son: 30º y 150º.

24. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\cos(-x)=-0,5$; b) $1+\cos(2x)=0$; c) $1+2\sin x=0$; d) $\tan(2x)=0$.

Indica en cada caso las soluciones en el primer giro.

Solución:

a) $2\cos(-x)=-0,5 \Leftrightarrow 2\cos(x)=-0,5 \Leftrightarrow \cos x=-0,25 \Rightarrow x=\arccos(-0,25) \Rightarrow$

$x=104,48^\circ+k\cdot 360^\circ$ (Otra solución es $x=-104,48^\circ+k\cdot 360^\circ=255,52^\circ+k\cdot 360^\circ$).

En la primera vuelta las soluciones son: x = 104,48º y x = 255,52º.

b) $1+\cos(2x)=0 \Rightarrow \cos(2x)=-1 \Rightarrow 2x=180^\circ+k\cdot 360^\circ=\pi+2k\pi \Rightarrow x=90^\circ+k\cdot 180^\circ=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Soluciones en el primer giro: 90º y 270º.

c) $1+2\sin x=0 \Rightarrow \sin x=-0,5 \Rightarrow x=\begin{cases}210^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 330^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases} \Leftrightarrow x=\begin{cases}\frac{7\pi}{6}+2k\pi\\ \frac{11\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$.

→ La calculadora da como solución x = –30º.

Las soluciones en la primera vuelta son: 210º y 330º.

d) $\tan(2x)=0 \Rightarrow 2x=\arctan 0 \Rightarrow 2x=0^\circ+k\cdot 180^\circ \Rightarrow x=0^\circ+k\cdot 90^\circ$.

Las soluciones en el primer giro son: 0º, 90º, 180º y 270º.

25. Resuelve:

a) $2\sin x\cdot\cos 2x=0$; b) $(1-\sin 2x)(1-\cos^2 x)=0$; c) $\cos 2x\cdot(1-\tan 3x)=0$.

Da todas las soluciones del primer giro.

Solución:

En los tres casos se plantea un producto con resultado 0; que se cumple cuando alguno de los factores vale 0.

a) $2\sin x\cdot\cos 2x=0 \to \begin{cases}\sin x=0\\ \cos 2x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\arcsin 0\to x=0^\circ,180^\circ\\ 2x=\arccos 0\to 2x=90^\circ,270^\circ\,(*)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0^\circ,180^\circ\\ x=45^\circ,135^\circ\end{cases}$.

(*) Como todas las soluciones de $2x=\arccos 0$ son $2x=\begin{cases}90^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 270^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases}45^\circ+k\cdot 180^\circ\\ 135^\circ+k\cdot 180^\circ\end{cases}$,

entonces, en la primera vuelta también deben incluirse x = 225º y x = 315º.

b) $(1-\sin 2x)(1-\cos^2 x)=0 \to \begin{cases}1-\sin 2x=0\\ 1-\cos^2 x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin 2x=1\\ \cos x=\pm 1\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}2x=\arcsin 1\to 2x=90^\circ+k\cdot 360^\circ\\ x=\arccos(\pm 1)\to x=0^\circ,180^\circ\end{cases} \Rightarrow$ x = 0º, 45º, 180º y 225º.

c) $\cos 2x\cdot(1-\tan 3x)=0 \to \begin{cases}\cos 2x=0\\ \tan 3x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x=\arccos 0\to 2x=90^\circ+180^\circ\cdot k\\ 3x=\arctan 1\to 3x=45^\circ+180^\circ\cdot k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=45^\circ+90^\circ k\\ x=15^\circ+60^\circ k\end{cases}$.

Luego, las soluciones de la primera vuelta son: 15º, 45º, 75º, 135º, 195º, 225º, 255º, 315º.

26. Resuelve las ecuaciones trigonométricas siguientes:

a) $\sin 2x=\sin x$; b) $\sin x=\cos x$; c) $\tan 2x+\tan x=0$.

Solución:

a) $\sin 2x=\sin x \Rightarrow 2\sin x\cos x=\sin x \Rightarrow 2\sin x\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(2\cos x-1)=0 \Rightarrow$

(alguno de los factores debe ser 0) $\to \begin{cases}\sin x=0\\ 2\cos x-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\arcsin 0\to x=0^\circ,180^\circ\\ x=\arccos(1/2)\to x=60^\circ,300^\circ\end{cases}$.

b) $\sin x=\cos x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}=1 \Rightarrow \tan x=1 \Rightarrow x=\arctan 1 \Rightarrow x=45^\circ;225^\circ$.

c) $\tan 2x+\tan x=0 \Rightarrow \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\tan x=0 \Rightarrow 2\tan x+\tan x(1-\tan^2 x)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan x(3-\tan^2 x)=0 \Rightarrow \begin{cases}\tan x=0\\ 3-\tan^2 x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\tan x=0\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\arctan 0\\ x=\arctan(\pm\sqrt{3})\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}x=0^\circ+k\cdot 180^\circ\\ x=60^\circ+k\cdot 180^\circ;\ x=120^\circ+k180^\circ\end{cases}$.

27. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sin x + \cos 2x = 1$; b) $\tan x = 5\sin x$; c) $\cos(2x) + 3\sin x = 2$.

Solución:

a) $\sin x + \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin x + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 1 \Rightarrow \sin x + \left(1 - \sin^2 x - \sin^2 x\right) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1/2 \end{cases}.$$

Las soluciones del primer giro son: $\begin{cases} x = \arcsin 0 \to x = 0^\circ; 180^\circ \\ x = \arcsin(1/2) \to x = 30^\circ; 150^\circ \end{cases}$.

b) $\tan x = 5\sin x \Rightarrow \dfrac{\sin x}{\cos x} = 5\sin x \Rightarrow \sin x = 5\sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x - 5\sin x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin x(1 - 5\cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 - 5\cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Cuyas soluciones son:

- $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ + k\cdot 180^\circ$.
- $\cos x = \dfrac{1}{5} = 0,2 \Rightarrow x = \arccos 0,2 \Rightarrow x = \begin{cases} 78,46^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 281,54^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$

Las soluciones del primer giro son: 0º, 180º, 78,46º y 281,54º.

c) Aplicando la identidad $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ y operando se obtiene:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0.$$

Resulta una ecuación de segundo grado, cuya incógnita es sin *x*.

Aplicando la fórmula que da la solución de la ecuación de segundo grado, se tiene:

$$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin 1 \\ x = \arcsin 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k\cdot 360^\circ \\ x = 30^\circ; 150^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$$

28. Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2\sin x - \cos y = 3/2 \\ \sin x + 2\cos y = -1/2 \end{cases}$.

Solución:

Puede hacerse por reducción:

$$\begin{cases} 2\sin x - \cos y = 3/2 \\ \sin x + 2\cos y = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ \end{matrix}\begin{cases} 4\sin x - 2\cos y = 3 \\ \sin x + 2\cos y = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix}\begin{cases} 4\sin x - 2\cos y = 3 \\ 5\sin x = 5/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ$; $x = 150^\circ$.

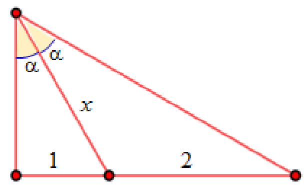
Sustituyendo $\sin x = \dfrac{1}{2}$ en la primera ecuación, se tiene:

$$1 - \cos y = 3/2 \Rightarrow \cos y = -1/2 \Rightarrow y = 120^\circ; y = 240^\circ.$$

Las soluciones son:

(30º, 120º); (30º, 240º); (150º, 120º); (150º, 240º).

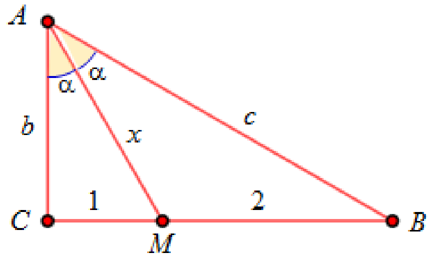
29. En un triángulo rectángulo la bisectriz de un ángulo agudo corta al cateto opuesto en dos trozos de longitudes 1 y 2. ¿Cuál es la longitud del segmento de bisectriz interior al triángulo?



Solución:

Aplicando la fórmula de la tangente del ángulo doble:

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}.$$



Como (en *ACM*) $\tan\alpha=\frac{1}{b}$ y (en *ABC*) $\tan(2\alpha)=\frac{3}{b}$, sustituyendo en la fórmula anterior:

$$\frac{3}{b}=\frac{2\cdot\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{b^2}}\Rightarrow 3-\frac{3}{b^2}=2\ \Rightarrow\ 3b^2-3=2b^2\Rightarrow b^2=3\Rightarrow b=\sqrt{3}.$$

En consecuencia, como en el triángulo *AMC* se cumple que:

$$x^2=b^2+1\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=2.$$

Observación: [Pinchando aquí] puedes ver otras formas de resolver este problema.