

TEMA II. APLICACIONES LINEALES

1.- APLICACIÓN ENTRE CONJUNTOS

Definición: Una correspondencia entre dos conjuntos A y B es subconjunto del producto cartesiano de ellos $A \times B$ que nos permite relacionar los elementos de A con los de B . Se representa como:

$$f: A \rightarrow B.$$

Así por ejemplo si $A = \{\text{alumnos de la UNED de Elche}\}$ y $B = \{\text{carreras que se pueden estudiar}\}$ podemos relacionar mediante la correspondencia “ f ” “estar matriculado”, cada elemento de A con uno de B . Se escribiría de esta forma: $f(\text{Silvia Martínez}) = \text{Psicología}$. La correspondencia recíproca (de B en A), asignaría el nombre de una carrera a todos los alumnos que la estudian.

Definición: Una **aplicación** es una correspondencia unívoca lo que significa que asocia a todo elemento de A un solo elemento de B .

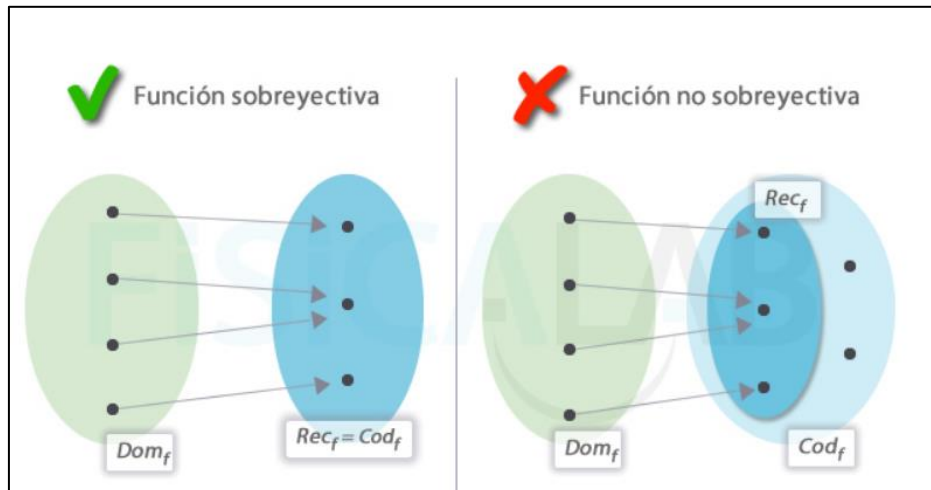
En el ejemplo anterior la correspondencia de A a B es aplicación (suponiendo que no haya nadie matriculado en más de una carrera) mientras que la de B a A no lo sería ya que una carrera se relacionaría con todos los alumnos matriculados en ella.

En cualquier aplicación, a los elementos del conjunto A se les llama **originales** y a los del B **imágenes**. En el ejemplo anterior, Psicología es la imagen de Silvia Martínez y Silvia Martínez es original de Psicología.

Se define “**el conjunto imagen**” o “**la imagen**” de una aplicación como el conjunto de todos los elementos de B que son imagen de elementos de A . En el ejemplo el conjunto imagen lo formarían todas las carreras que tuvieran algún alumno matriculado.

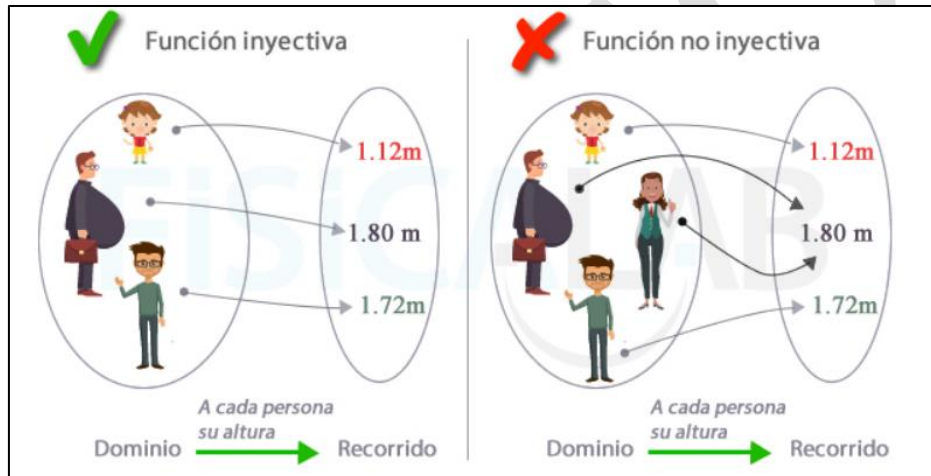
2.- TIPOS DE APLICACIONES

- a) **Suprayectiva:** Una aplicación es suprayectiva si para cualquier elemento b de B existe al menos un elemento a de A tal que $f(a) = b$. En este caso el conjunto imagen es B . Significa que en B no existe ningún elemento que no tenga contraimagen en A .
 $\forall b \in B, \exists a \in A \text{ tal que } b = f(a)$



- b) **Inyectiva.** Una aplicación es inyectiva si se cumple que dos elementos de A , distintos, tienen imágenes distintas.

$$\forall a, a' \in A, \text{ si } f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$



- c) **Biyectiva.** Una aplicación es biyectiva cuando se verifica que es simultáneamente suprayectiva e inyectiva

3.- APLICACIÓN LINEAL.

Definición: Sean V y W dos espacios vectoriales sobre K , se denomina **aplicación lineal** $f: V \rightarrow W$ a la aplicación que cumple que $f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

De la definición anterior se deducen las siguientes observaciones:

- 1.) $f(\vec{0}) = \vec{0} \quad y \quad f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$
- 2.) Si F es un subespacio vectorial de V , $f(F)$ es subespacio vectorial de W
- 3.) Si F es subespacio vectorial de W , $f^{-1}(F)$ es subespacio vectorial de V

Ejemplos:

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

- 1) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$
2) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1, -x_2)$
3) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donde $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2, 3x_1, x_2 - x_3)$

Se demostraría, aplicando las propiedades anteriores, que son ejemplos de aplicaciones lineales

4.- MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Definición: Sea f una **aplicación lineal** de V en W espacios vectoriales y sean $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $B' = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ dos bases de V y W respectivamente. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, podemos poner $f(\vec{v}_i)$ como combinación lineal de los vectores de la base B' de la siguiente manera $f(\vec{v}_i) = a_{i1}\vec{w}_1 + \dots + a_{im}\vec{w}_m$ donde los a_{ij} constituyen las coordenadas del vector $f(\vec{v}_i)$ respecto de la base B' .

A la matriz $A = (a_{ij})$ se le llama la **matriz de la aplicación lineal** y se cumple que
Sea $\vec{v} \in V, f(\vec{v}) = A\vec{v}$

Dichas coordenadas constituyen la columna “i” de la matriz asociada a la aplicación lineal dada.

1	Sea la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$ y sean B y B' las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$. Calcular la matriz asociada.
	<u>Solución:</u> Calculamos: $f(1, 0, 0) = (1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$ $f(0, 1, 0) = (0, -1) = 0(1, 0) - 1(0, 1)$ $f(0, 0, 1) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1)$ La matriz sería $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ Nótese que los números en negrita están en las columnas de la matriz.
2	Sea la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$ y sean B la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{(2, 1), (-1, -1)\}$ la base de $\mathbb{R}^2$. Calcular la matriz asociada.
	<u>Solución:</u> Calculamos: $f(1, 0, 0) = (1, 2) = a(2, 1) + b(-1, -1) \quad \text{de donde } a = -1 \text{ y } b = -3$ $f(0, 1, 0) = (0, -1) = a(2, 1) + b(-1, -1) \quad \text{de donde } a = 1 \text{ y } b = 2$ $f(0, 0, 1) = (1, 0) = a(2, 1) + b(-1, -1) \quad \text{de donde } a = 1 \text{ y } b = 1$ En este caso la matriz asociada a la aplicación lineal sería $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3	Sean la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$ y sean B la base $\mathbb{R}^3$ $B = \{(3, 2, -1), (2, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ y B' la canónica de $\mathbb{R}^2$. Calcular la matriz asociada.
	<u>Solución:</u> $f(3, 2, -1) = (2, 4) = 2(1, 0) + 4(0, 1)$

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	$f(2,0,2) = (4,4) = 4(1,0) + 4(0,1)$ $f(0,1,1) = (1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$ La matriz asociada sería $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
4	Sea la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$ y sea B la base $\mathbb{R}^3$ $B = \{(3, 2, -1), (2, 0, 2), (0, 1, 1)\}$ y $B' = \{(2, 1), (-1, -1)\}$ la base de $\mathbb{R}^2$. Calcular la matriz asociada.
	<u>Solución:</u> Calculamos: $f(3, 2, -1) = (2, 4) = a(2, 1) + b(-1, -1)$ de donde $a = -2$ $b = -6$ $f(2, 0, 2) = (4, 4) = a(2, 1) + b(-1, -1)$ de donde $a = 0$ $b = -4$ $f(0, 1, 1) = (1, -1) = a(2, 1) + b(-1, -1)$ de donde $a = 2$ $b = 3$ La matriz asociada será $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ Obsérvese que los ejemplos más sencillos son aquellos en los que la base del espacio vectorial F es la canónica ya que en este caso la imagen del vector coincide con las coordenadas del vector respecto de la base.

Nota importante: En el ejemplo 1) de este epígrafe teníamos la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$ y su matriz asociada en las bases canónicas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si queremos calcular la imagen de un vector cualquiera por ejemplo el $(2, -1, 4)$ podemos

utilizar la expresión de f

- $f(2, -1, 4) = [2 + 4, 2 \cdot 2 - (-1)] = (6, 5)$
- o bien multiplicando la matriz por el vector en forma de columna $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ obteniendo el mismo resultado

Análogamente el problema contrario al anterior. Se trata de, conociendo la matriz asociada a una aplicación lineal en las bases canónicas, encontrar la expresión algebraica de esta aplicación.

Supongamos que nos dan una matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que es la asociada a una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ referida a las bases canónicas.

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

Sol: Se trata de calcular la expresión de $f(x_1, x_2, x_3)$.

Sabemos que: $f(1, 0, 0) = (2, 0, 1)$ $f(0, 1, 0) = (4, 3, 0)$ y $f(0, 0, 1) = (-1, 1, 1)$

Como $(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$ se tendrá que

$$f(x_1, x_2, x_3) = f[x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)] =$$

$$= x_1 f(1, 0, 0) + x_2 f(0, 1, 0) + x_3 f(0, 0, 1) = x_1(2, 0, 1) + x_2(4, 3, 0) + x_3(-1, 1, 1) =$$

$$= (2x_1 + 4x_2 - x_3, 3x_2 + x_3, x_1 + x_3) \text{ ***** que es la expresión buscada.}$$

Este resultado se puede obtener también multiplicando la matriz dada por el vector (x_1, x_2, x_3) .

$$\text{Veámoslo. Si multiplicamos } \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 - x_3 \\ 3x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} \text{ que si lo ponemos como}$$

fila obtenemos la expresión *****

6.- NÚCLEO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Definición: Se define como **Kerf o Núcleo** de $f: V \rightarrow W$ aplicación al subconjunto de V que son la contraimagen del vector $\vec{0}$, es decir, $\text{Kerf} = \{\vec{v} \in V \text{ tal que } f(\vec{v}) = \vec{0}\}$

Proposición: Sea $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal entre dos espacios vectoriales, se verifica:

- Kerf es un subespacio vectorial de V

1	Calcular el núcleo de la aplicación lineal definida por $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1, -x_2)$
	<u>Solución:</u> Como $f(x_1, x_2) = 0_F = (0, 0, 0) = (x_1 + x_2, 2x_1, -x_2)$ de aquí $\left. \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$ de donde $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$ y el núcleo está formado sólo por el $(0, 0) = \vec{0}_V$
2	Calcular el núcleo de la aplicación lineal definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$
	<u>Solución:</u> En este caso $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$ y de aquí $\left. \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \right\}$ como $x_3 = -x_1$ y $x_2 = 2x_1$, el núcleo está formado por los vectores de la forma $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_1, -x_1) = x_1(1, 2, -1)$, es decir, lo forman todos aquellos vectores generados por el $(1, 2, -1)$.

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	Se escribe $\text{Ker } f = L\{(1, 2, -1)\}$ Se puede comprobar que cualquier vector generado por él, se transforma en el neutro
3	Sea la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 - x_3)$ ¿Cuál de los siguientes vectores $(1, 2, 0)$ $(1, -1, 1)$ $(2, -1, 3)$ pertenece al $\text{Ker } f$?
	<u>Solución:</u> El vector que pertenezca al $\text{Ker } f$ se tiene que transformar mediante la aplicación f, en el neutro de $\mathbb{R}^2$. Si calculamos $f(2, -1, 3) = (0, 0)$. Se puede comprobar que los otros dos no lo verifican
4	La matriz asociada a una aplicación lineal en las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Cuál de los siguientes vectores $(1, 2, 0)$ $(1, -1, 1)$ $(2, -1, 3)$ pertenece al $\text{Ker } f$?
	<u>Solución:</u> Como hemos dicho en la nota anterior, la imagen de un vector, también se puede calcular multiplicando la matriz por dicho vector. En este caso $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, este vector es el que pertenece al núcleo

7.- IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Sea f una aplicación lineal de V en W . **La imagen de esta aplicación la constituyen todos los vectores de W que son imagen de al menos un vector de V .**

Definición: Se define como **Im f o Imagen** de f al subconjunto de W de todas las imágenes de vectores de V por f , es decir, $\text{Im } f = \{\vec{w} \in W \text{ tal que } \exists \vec{v} \in V \text{ con } f(\vec{v}) = \vec{w}\}$

Proposición 1: Sea $f: V \rightarrow W$ aplicación lineal entre dos espacios vectoriales, se verifica:

- $\text{Im } f$ es un subespacio vectorial de W

Proposición 2: La imagen de un sistema generador de V , es un sistema generador de la imagen de $f(V)$.

Proposición 3: f es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_V\}$

Proposición 4: f es suprayectiva $\Leftrightarrow \text{Im } f = W$

1	Sea la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$, calcular un sistema generador de la imagen, así como una base y su dimensión
	<u>Solución:</u>

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	Calculamos $f(1,0,0) = (1,2)$ $f(0,1,0) = (0,-1)$ $f(0,0,1) = (1,0)$ Como la base canónica es un sistema generador de V, sus imágenes que son los vectores $ImB = \{(1,2), (0,-1), (1,0)\}$ son un sistema generador de la Imf. Si queremos buscar una base de la imagen tendremos que elegir los que sean linealmente independientes, por ejemplo $\{(1,2), (0,-1)\}$. Se escribe $Imf = L\{(1,2), (0,-1)\}$
2	La matriz asociada a una aplicación lineal de R^3 en R^3 en las bases canónicas viene dada por $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Averiguar la dimensión del subespacio imagen
	<u>Solución:</u> Sabemos que las columnas de la matriz son las imágenes de la base canónica de R^3, por lo tanto, son un sistema generador de la imagen de f. Para averiguar su dimensión, hemos de ver cuántos son linealmente independientes. Si observamos la tercera columna, vemos que es suma de las dos primeras, luego la dimensión es 2. También podíamos haberlo visto calculando el determinante de orden 2×2 y comprobando que da 0. Luego $Imf = L\{(1,2,-1), (-1,1,0)\}$
3	La matriz asociada a una aplicación lineal de R^4 en R^2 en las bases canónicas viene dada por $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Averiguar la dimensión del subespacio imagen.
	<u>Solución:</u> Las columnas sabemos que generan la imagen. Si las observamos, vemos que son proporcionales. Luego la dimensión de la imagen de f es 1. Se escribe $Imf = L\{(2,-1)\}$
4	La matriz asociada a una aplicación lineal de R^4 en R^3 en las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Cuál de estas ecuaciones representa al subespacio Imf? a) $y_1 + y_2 - y_3 = 0$ b) $y_1 + y_2 - 3y_3 = 0$ c) $2y_1 - 3y_2 + y_3 = 0$ d) $2y_1 + 3y_2 - y_3 = 0$
	<u>Solución:</u> Como los vectores columna son un sistema generador de la imagen y por lo tanto pertenecen a ella, tendrán que cumplir la ecuación correspondiente. Podemos comprobar que dichas columnas sólo verifican la ecuación del apartado c)

10.- RANGO DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Definición: El rango de una aplicación lineal es la **dimensión del subespacio Imf** es decir $ran(f) = \dim(Imf)$.

Ejemplo:

La matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}. \text{ Calcular el rango}$$

Solución: El rango de una aplicación lineal es la dimensión del subespacio imagen. Sabemos que las columnas de la matriz son un sistema generador de dicho subespacio. Para saber su dimensión hemos de calcular las columnas que son linealmente independientes.

Como son vectores de $\mathbb{R}^3$, como máximo será 3. Las dos primeras lo son. Veamos si al añadir la tercera lo son.

- Para ello calculamos el determinante formado por las tres primeras columnas y vemos que nos da 0.
- Probamos ahora con la primera, segunda y cuarta y vemos que también da 0. Luego sólo hay dos linealmente independientes.

El rango es por tanto 2

Proposición: f es suprayectiva $\Leftrightarrow rang(f) = \dim F$

11.- DIMENSIONES DE LOS SUBESPACIOS VECTORIALES DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Teorema: Si f es una aplicación lineal de V en W se cumple:

$$\dim Ker f + \dim Img f = \dim V$$

1	Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_1 - x_2)$. Se pide calcular las dimensiones del núcleo y la imagen
	<u>Solución:</u> Hemos visto en el apartado 5, ejemplo 2, que el núcleo está formado por los vectores de la forma $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_1, -x_1) = x_1(1, 2, -1)$, es decir, lo forman todos aquellos vectores generados por el $(1, 2, -1)$. $Ker f = L(1, 2, -1)$ y, por lo tanto, su dimensión es 1. Como la dimensión de V es 3, por el teorema anterior será: $\dim(Imf) = \dim V - \dim Ker f = 3 - 1 = 2$

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

2	La matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ en las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Cuáles son las dimensiones del núcleo y la imagen?
	<u>Solución:</u> Hemos visto antes que el rango de esta aplicación lineal era 2 y, por lo tanto, ésta es la dimensión de la Imf. Haciendo ahora uso del teorema se tendrá: $\dim Kerf + \dim Imf = \dim \mathbb{R}^4$ $\dim Kerf + 2 = 4 \Rightarrow \dim Kerf = 2$

12.- MONOMORFISMO, EPIMORFISMO, ISOMORFISMO Y AUTOMORFISMO

- a) Un monomorfismo es una aplicación lineal que es inyectiva
- b) Un epimorfismo es una aplicación lineal que es suprayectiva
- c) Un isomorfismo es una aplicación lineal que es biyectiva
- d) Un automorfismo es un isomorfismo con $E = F$

13.- Caracterización de una aplicación lineal conociendo las imágenes de los vectores de una base cualquiera

Se trata de encontrar la expresión algebraica de una aplicación lineal conociendo las imágenes de los vectores de una base cualquiera

Ejemplo:

Supongamos una aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y sea una base de $\mathbb{R}^3$ dada por los vectores $B' = \{ (1, 1, 0) (0, 1, 0) (1, 0, 1) \}$ y conocemos las imágenes de estos vectores que son

$$f(1, 1, 0) = (2, 1) \quad , \quad f(0, 1, 0) = (1, 0) \quad y \quad f(1, 0, 1) = (1, 2).$$

Determinemos la expresión general de la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3)$ en las bases canónicas.

Solución 1 (A través de matrices):

La matriz en la Base B' en $\mathbb{R}^3$ y la canónica en $\mathbb{R}^2$ B_2 será $M_{B'_2}f: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Esta es la matriz de cambio de base de B' a B , siendo B la base canónica

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

$$M_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz pedida será:

$$M_{BB_2}f: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto en expresión algebraica será:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2, x_1 + x_3)$$

Solución 2 (A partir de definiciones):

Como $(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$

entonces:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f[x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)] = \\ &= x_1f(1,0,0) + x_2f(0,1,0) + x_3f(0,0,1) \end{aligned}$$

De aquí sólo sabemos el valor de $f(0,1,0)$ pero no sabemos $f(1,0,0)$ ni $f(0,0,1)$. Veamos como lo solucionamos.

Para ello ponemos los vectores $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ como combinación lineal de los vectores de la base dada

$$(1,0,0) = a(1,1,0) + b(0,1,0) + c(1,0,1) \text{ de donde } a = 1, b = -1, c = 0$$

$$(0,0,1) = a(1,1,0) + b(0,1,0) + c(1,0,1) \text{ de donde } a = -1, b = 1, c = 1$$

Si ahora sustituimos en la expresión de arriba

$$\begin{aligned} &x_1f[1(1,1,0) - 1(0,1,0)] + x_2f(0,1,0) + x_3f[-1(1,1,0) + 1(0,1,0) + 1(1,0,1)] = \\ &= x_1[(2,1) - (1,0)] + x_2(1,0) + x_3[-(2,1) + (1,0) + (1,2)] = \\ &= x_1(1,1) + x_2(1,0) + x_3(0,1) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3) \end{aligned}$$

que es la expresión de la aplicación lineal.

15.- Suma de aplicaciones lineales

Definición: Supongamos dos aplicaciones lineales f y g de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ cuyas matrices asociadas en unas determinadas bases son A y B . Entonces la aplicación $f + g$ que se obtiene sumando componente a componente las aplicaciones f y g tiene como matriz asociada en las mismas bases la matriz la suma de matrices $A + B$.

Ejemplo: Sean f y g dos aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ definidas como:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 + x_2, 2x_1 + x_2) \text{ y } g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_1, -x_1 + 2x_2)$$

La matriz asociada a f en las bases canónicas sería $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la de g sería $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

La aplicación $f + g$ sería: $(f + g)(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, 4x_1 + x_2, x_1 + 3x_2)$ cuya matriz sería:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ que se comprueba que es la suma de } A + B$$

16.- Composición de aplicaciones

Dada una aplicación lineal f de V en W y otra g de W en T , se trata de buscar una aplicación lineal de V en T que se llama aplicación compuesta de f y g y se representa $g \circ f$.

Nótese que el espacio vectorial final de la aplicación $f(V)$ es el subespacio vectorial inicial de la aplicación g .

Para calcular la matriz C asociada a la aplicación compuesta en las bases canónicas se **multiplican las matrices** A y B siendo A la matriz asociada a la aplicación g en las bases canónicas y B la matriz asociada a f en las bases canónicas

De hecho, esta es una de las razones por las que se definen la multiplicación de matrices de esa forma, y no de otra, porque representa la composición de aplicaciones lineales de forma natural.

1

Sea la aplicación f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ dada por la expresión

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$$

y sea la aplicación lineal g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ dada por la expresión

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + 2x_3).$$

Obtener la expresión de la aplicación compuesta.

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	<u>Solución:</u> Sabemos que la matriz B viene dada por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz A vale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matriz asociada a la aplicación compuesta es $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y por tanto su expresión sería $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ 4x_1 + x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ es decir: $(g \circ f)(x_1, x_2) = (-x_1, 4x_1 + x_2, 3x_1 + x_2)$***** Solución alternativa: También se podría haber hecho aplicando la definición. Quedaría así: $(g \circ f)(x_1, x_2) = g[f(x_1, x_2)] = g(x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2) = g(t_1, t_2, t_3) =$ Ahora escribimos la expresión de g aplicada al vector (t_1, t_2, t_3) $= (t_1 - t_3, t_1 + t_2 + t_3, -t_1 + 2t_3)$ y ahora deshacemos el cambio sustituyendo las “t” por su valor, quedando: $= [x_1 + x_2 - (2x_1 + x_2), x_1 + x_2 + x_1 - x_2 + 2x_1 + x_2, -(x_1 + x_2) + 2(2x_1 + x_2)] =$ $= (-x_1, 4x_1 + x_2, 3x_1 + x_2)$ que coincide con *****
2	Sea f la aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (-8x_1 - 2x_2, 3x_1 - x_2)$ Si el vector $\vec{v} = (2, -3)$, calcular $[f \circ f](\vec{v})$
	<u>Solución:</u> $[f \circ f](\vec{v}) = f[f(\vec{v})] = f(4, -5) = (-22, 17)$
3	La matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ viene dada por $\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$ y sea $\vec{v} = (2, -3)$. Calcular $[f \circ f \circ f](\vec{v})$
	<u>Solución:</u> $[f \circ f \circ f](\vec{v}) = [f \circ f][f(\vec{v})]$ Pero $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Quedaría $[f \circ f](-4, 6) = f[f(-4, 6)]$.

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

Pero $f(-4, 6) = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$ y queda $= f(8, -12) = \begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 24 \end{pmatrix}$ que es el resultado pedido. También se puede poner $\begin{pmatrix} -16 \\ 24 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -8\vec{v}$

17.- Rango de una matriz

Definición: Llamaremos rango de una matriz al número de filas o columnas linealmente independientes (L.I.)

Nótese que es un número natural.

1	Calcula el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
	<u>Solución:</u> a) Como las dos columnas son L.I. el rango es 2 b) El rango es 2, ya que en $\mathbb{R}^2$, a lo sumo hay dos vectores L.I. Los dos primeros por ejemplo lo son c) El rango es 3, ya que las tres columnas son L.I. Se puede comprobar viendo que el determinante es distinto de 0 d) El rango es 2. El determinante vale 0 con lo que no puede ser 3 y además las dos primeras columnas por ejemplo son L.I. e) El rango es 2. Las dos primeras son L.I. y al intentar ampliar, el determinante en los dos casos vale 0

18.- Forma lineal/Espacio Dual

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre K , llamaremos **forma lineal** a toda aplicación lineal de V en K .

Ejemplo: Sea $V = \mathbb{R}^3$ un espacio vectorial sobre un cuerpo R . Las formas lineales en este caso son las aplicaciones lineales $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, como, por ejemplo
 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$ ó $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 4x_2 + x_3$ etc.

Nótese que la imagen en este caso es un elemento de R es decir un número.

Definición: El conjunto de todas las formas lineales de V en K es un espacio vectorial que se denomina **Espacio dual** y se escribe:

$$V^* = \{ f: V \longrightarrow K \text{ con } f \text{ forma lineal} \} = L(V, K)$$

19.- Base dual

Al ser V^* un espacio vectorial, sus elementos que son las formas lineales cumplen todas las propiedades de serlo. En particular se pueden encontrar bases.

Definición: Dada una base del espacio vectorial V , existe una base asociada en V^* que se denomina **base dual**,

si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V , su base dual $B' = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ cumple que:
 $v_i^*(v_j) = 1$ si $i = j$ y $v_i^*(v_j) = 0$ si $i \neq j$

1	Calcular la base dual de $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,1,1) (0,-1,2) (-1,-1,0)\}$.
	<u>Solución:</u> Escribimos los vectores $\{e_1, e_2, e_3\}$ de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de éstos $(1,0,0) = a(1,1,1) + b(0,-1,2) + c(-1,-1,0)$ de donde $a = -2, b = 1, c = -3$ $(0,1,0) = a(1,1,1) + b(0,-1,2) + c(-1,-1,0)$ de donde $a = 2, b = -1, c = 2$ $(0,0,1) = a(1,1,1) + b(0,-1,2) + c(-1,-1,0)$ de donde $a = 1, b = 0, c = 1$ Es decir: $(1,0,0) = -2(1,1,1) + 1(0,-1,2) - 3(-1,-1,0) = -2v_1 + v_2 - 3v_3$ $(0,1,0) = 2(1,1,1) - 1(0,-1,2) + 2(-1,-1,0) = 2v_1 - v_2 + 2v_3$ $(0,0,1) = 1(1,1,1) + 0(0,-1,2) + 1(-1,-1,0) = v_1 + v_3$ Ahora bien dado un vector cualquiera:

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$ se tendrá que: $v_1^*(x_1, x_2, x_3) = v_1^*[x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)]$ $= x_1 \cdot v_1^*(1, 0, 0) + x_2 \cdot v_1^*(0, 1, 0) + x_3 \cdot v_1^*(0, 0, 1) =$ $= x_1 \cdot v_1^*[-2v_1 + v_2 - 3v_3] + x_2 \cdot v_1^*[2v_1 - v_2 + 2v_3] + x_3 \cdot v_1^*[v_1 + v_3] =$ $= x_1 \cdot v_1^*(-2v_1) + x_1 \cdot v_1^*(v_2) + x_1 \cdot v_1^*(-3v_3) + x_2 \cdot v_1^*(2v_1) + x_2 \cdot v_1^*(-v_2)$ $+ x_2 \cdot v_1^*(2v_3) + x_3 \cdot v_1^*(v_1) + x_3 \cdot v_1^*(v_3)$ y recordando $** = -2x_1 + 2x_2 + x_3$ Análogamente para v_2^* y v_3^* $v_2^*(x_1, x_2, x_3) = v_2^*[x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)] = x_1 \cdot v_2^*(1, 0, 0) +$ $x_2 \cdot v_2^*(0, 1, 0) + x_3 \cdot v_2^*(0, 0, 1) =$ $= x_1 \cdot v_2^*[-2v_1 + v_2 - 3v_3] + x_2 \cdot v_2^*[2v_1 - v_2 + 2v_3] + x_3 \cdot v_2^*[v_1 + v_3] =$ $x_1 \cdot v_2^*(-2v_1) + x_1 \cdot v_2^*(v_2) + x_1 \cdot v_2^*(-3v_3) + x_2 \cdot v_2^*(2v_1) + x_2 \cdot v_2^*(-v_2) + x_2 \cdot$ $v_2^*(2v_3) + x_3 \cdot v_2^*(v_1) + x_3 \cdot v_2^*(v_3)$ y recordando $** = x_1 - x_2$ $v_3^*(x_1, x_2, x_3) = v_3^*[x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)] = x_1 \cdot v_3^*(1, 0, 0) +$ $x_2 \cdot v_3^*(0, 1, 0) + x_3 \cdot v_3^*(0, 0, 1) =$ $= x_1 \cdot v_3^*[-2v_1 + v_2 - 3v_3] + x_2 \cdot v_3^*[2v_1 - v_2 + 2v_3] + x_3 \cdot v_3^*[v_1 + v_3] =$ $x_1 \cdot v_3^*(-2v_1) + x_1 \cdot v_3^*(v_2) + x_1 \cdot v_3^*(-3v_3) + x_2 \cdot v_3^*(2v_1) + x_2 \cdot v_3^*(-v_2) + x_2 \cdot$ $v_3^*(2v_3) + x_3 \cdot v_3^*(v_1) + x_3 \cdot v_3^*(v_3)$ y recordando $** = -3x_1 + 2x_2 + x_3$
2	Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $B^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ la base dual de B. Si w es el vector $w = 5v_1 - v_2 - 3v_3$, calcula $v_1^*(w)$; $v_2^*(w)$; $v_3^*(w)$
	<u>Solución:</u> $v_1^*(5v_1 - v_2 - 3v_3) = 5v_1^*(v_1) - v_1^*(v_2) - 3v_1^*(v_3) = 5 \cdot 1 - 0 - 0 = 5 \text{ por definición de base dual.}$ Análogamente $v_2^*(5v_1 - v_2 - 3v_3) = 5v_2^*(v_1) - v_2^*(v_2) - 3v_2^*(v_3) = 0 - 1 - 0 = -1$ $v_3^*(5v_1 - v_2 - 3v_3) = 5v_3^*(v_1) - v_3^*(v_2) - 3v_3^*(v_3) = 5 \cdot 0 - 0 - 3 \cdot 1 = -3$

20.- Ortogonalidad

Definición: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea V^* su espacio dual. Se dice que un elemento $f \in V^*$ y un vector $\vec{v} \in V$ **son ortogonales** si se cumple que $f(\vec{v}) = 0$

21.- Aplicaciones afines

Definición: Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Dada una aplicación φ de V en W se dice que es una **aplicación afín** si existe un vector w_0 de W y una aplicación lineal f de V en W tal que $\forall v \in V$ se cumple que $\varphi(v) = w_0 + f(v)$

Ejemplo: La aplicación $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \longrightarrow \varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 1, 2)$

Es una aplicación afín ya que se puede poner como:

$\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + 1, 2) = (1, 2) + (x_1 + x_2, 0)$ donde el vector $w = (1, 2)$ y la aplicación f es $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 0)$ que es lineal

PROBLEMAS RESUELTOS

1	¿Cuál de las siguientes aplicaciones es una aplicación lineal? a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = x - y$ b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + y, x)$ c) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x^2, y, z)$ d) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x + 1, 2y, x + y)$
	<u>Solución:</u> Razonémoslo por descarte La a) no puede ser por tener el valor absoluto. La c) por tener el cuadrado y por estar mal definida (en la imagen aparece la z y parte de $\mathbb{R}^2$). La d) tampoco es porque el neutro de $\mathbb{R}^2$ no se transforma en el neutro de $\mathbb{R}^3$ sino en el $(1, 0, 0)$. La respuesta es la b)
2	Consideremos la base de $\mathbb{R}^4$: $B = \{(1, 0, 0, 0) (0, 1, 0, 0) (0, 0, 1, 0) (0, 0, 1, 1)\}$ y sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ que verifica: $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0) \quad f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 4)$ $f(0, 0, 1, 0) = (0, -1, -3) \quad f(0, 0, 1, 1) = (1, -1, -2)$ entonces $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ vale: a) $(x_1 + x_2 + x_4, x_2 - x_3, 4x_2 - 3x_3 + x_4)$ b) $(x_1 + x_2 + x_4, x_2 - x_3 - x_4, 4x_2 - 3x_3 - 2x_4)$ c) $(x_1 + x_2 - x_4, x_2 - x_3 - x_4, 4x_2 - 3x_3 - 2x_4)$ d) $(x_1 + x_2 - x_4, x_2 - x_3, 4x_2 - 3x_3 - 2x_4)$
	<u>Solución:</u> Sabemos que $(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1)$ Entonces: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1f(1, 0, 0, 0) + x_2f(0, 1, 0, 0) + x_3f(0, 0, 1, 0) + x_4f(0, 0, 0, 1)$

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	Como no sabemos que vale $f(0, 0, 0, 1)$, escribimos este vector en función de la base B $(0, 0, 0, 1) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 1, 1)$ de donde $a = b = 0$; $c = -1$ y $d = 1$. Por tanto: $f(0, 0, 0, 1) = f[-(0, 0, 1, 0) + (0, 0, 1, 1)] = -(0, -1, -3) + (1, -1, -2) = (1, 0, 1)$ Sustituyendo en la primera expresión $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1, 0, 0) + x_2(1, 1, 4) + x_3(0, -1, -3) + x_4(1, 0, 1) =$ $= (x_1 + x_2 + x_4, x_2 - x_3, 4x_2 - 3x_3 + x_4) \text{ que es la a)}$
3	La matriz asociada en las bases canónicas es: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
	Solución: Como: $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0)$ $f(0, 1, 0, 0) = (1, 1, 4)$ $f(0, 0, 1, 0) = (0, -1, -3)$ $f(0, 0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ si los colocamos en columnas nos da la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ que es la a)
4	El subespacio $Im f$ es: a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 / x_1 = 0 \text{ ; } x_2 + x_4 = 0\}$ b) $\{(0, \lambda, \lambda, -\lambda) \in R^4 / \lambda \in R\}$ c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 / x_1 = 0\}$ d) R^3

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	<u>Solución:</u> Sabemos que las columnas de la matriz son un sistema generador de la $Im f$, por tanto, han de cumplir las ecuaciones. La a) no es correcta porque en las columnas, la primera componente no es 0 más que en la tercera. La b) no es correcta ya que las columnas son vectores de $\mathbb{R}^3$ y en esta respuesta los escribe de $\mathbb{R}^4$. A la c) le pasa lo mismo que a la a). La respuesta es la d). También se puede comprobar, viendo que las tres primeras son vectores L.I. Luego son una base de $\mathbb{R}^3$ y este espacio vectorial sería la $Im f$.
5	Unas ecuaciones del subespacio $Ker f$ son: a) $x_1 = 0; x_2 = x_3; x_2 = -x_4$ b) $x_1 = 0; x_2 = x_3$ c) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ d) $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = -x_4$
	<u>Solución:</u> Sabemos que la imagen de un vector del núcleo es el elemento neutro. Veamos cuál es. Un vector del apartado a) sería de la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ -t \end{pmatrix}$. Entonces $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y esta sería la respuesta. Nótese que la c) también serviría porque la imagen del neutro es el neutro, pero esta ya se da por supuesta. Sería válida si no hubiera otra cierta También se podía haber hecho cogiendo la definición de f $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_4, x_2 - x_3, 4x_2 - 3x_3 + x_4)$, igualarla al neutro $(0, 0, 0)$ y resolver el sistema: $\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$ y de aquí obtenemos: $x_1 = 0; x_2 = x_3; x_2 = -x_4$
6	La aplicación lineal f es:

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	a) Suprayectiva b) Inyectiva c) Automorfismo d) Ninguna de ellas
	Sol: Como $Imf = R^3$ es suprayectiva y como $Kerf$ no es el neutro no es inyectiva. Luego es la a). Para que sea automorfismo ha de ser biyectiva y entre los mismos espacios vectoriales
7	Si g es la aplicación lineal de R^3 en R^2 dada por: $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2)$ entonces el segundo vector columna de la matriz asociada a $g \circ f$ en las bases canónicas es: a) (1, 1) b) (0, 0) c) (1,0,4) d) (1, 0)
	Sol: Como $g(1,0,0) = (1, 1)$; $g(0,1,0) = (0, -1)$ y $g(0,0,1) = (0,0)$, su matriz asociada en las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz asociada a $g \circ f$ es: $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la respuesta es la d)
8	¿Cuál de las siguientes aplicaciones es una forma lineal? a) $f: R^2 \rightarrow R$ tal que $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ b) $f: R^3 \rightarrow R$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = -x_2$ c) $f: R^3 \rightarrow R$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = 3$ d) $f: R^2 \rightarrow R$ tal que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
	<u>Solución:</u> Por teoría sabemos que una forma lineal es una aplicación $f: R^n \rightarrow R$ definida como $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$ Según esta definición la respuesta es la b)
9	Sea f la aplicación lineal de R^3 en R^2 definida como: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$ La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas es: a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
	<u>Solución:</u> Calculamos $f(1, 0, 0) = (1, 1)$; $f(0, 1, 0) = (1, 0)$ y $f(0, 0, 1) = (0, -1)$ que en

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	columnas nos da la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ que es la b)
10	La matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases: $B = \{(1, 0, 0)(0, 1, 0)(1, 1, 1)\}$ y $B' = \{(2, 2)(1, 0)\}$ es: a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
	<u>Solución:</u> Como en el espacio de llegada no tenemos la base canónica, las imágenes de los vectores de la base B se han de escribir como combinación lineal de la base B' y sus coordenadas formarán las columnas de la matriz buscada Calculamos $f(1, 0, 0) = (1, 1) = a(2, 2) + b(1, 0)$ de donde $a = \frac{1}{2}$ y $b = 0$ $f(0, 1, 0) = (1, 0) = a(2, 2) + b(1, 0)$ de donde $a = 0$ y $b = 1$ $f(1, 1, 1) = (2, 0) = a(2, 2) + b(1, 0)$ de donde $a = 0$ y $b = 2$ Estas coordenadas en columnas nos dan la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ que es la c)
11	Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ de matriz asociada A en las bases canónicas y g la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ de matriz asociada B en las bases canónicas. El núcleo de f es: a) $(0, 0, 0)$ b) $\{(t, \frac{t}{2}, -t) t \in \mathbb{R}\}$ c) $L(1, \frac{1}{2})$ d) Ninguna de las anteriores
	Sol: Las columnas de la matriz A son un sistema generador de Imf. En este caso son 3 y las dos primeras por ejemplo son L.I. Por tanto, $\dim(Imf) = 2$. Por el teorema de las dimensiones: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(Imf) + \dim(Kerf)$; $3 = 2 + \dim(Kerf)$ de donde $\dim(Kerf) = 1$. Por tanto, la única solución posible es la c). La probamos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \frac{t}{2} \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y esta es la respuesta.

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

12	La imagen de g es: a) $Img = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2z = 0\}$ b) $Img = R^3$ c) $Img = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y = 0\}$ d) $Img = \{(0, 0)\}$
	<u>Solución:</u> Las columnas de la matriz B han de cumplir la ecuación de la respuesta adecuada. Como son 2 no puede ser ni la b) ni la d). Sustituyendo vemos que cumple la a)
13	El núcleo de $g \circ f$ es: a) $Ker(g \circ f) = \{(t, \frac{t}{2}, -t) : t \in R\}$ b) $Ker(g \circ f) = \{(t, \frac{t}{2}) : t \in R\}$ c) $Ker(g \circ f) = \{(0, 0, 0)\}$ d) Ninguna de las anteriores
	<u>Solución:</u> Calculamos la matriz asociada a $g \circ f$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Como las columnas de la matriz generan la $Im(g \circ f)$ y solo las dos primeras son L.I. (se puede comprobar por el determinante de la matriz 3x3 es 0) deducimos que $dim Ker f = 1$, la única posible es la a). Lo comprobamos $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \frac{t}{2} \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y es la a)
14	¿Cuál de las siguientes aplicaciones es una aplicación lineal? a) $f: R^2 \rightarrow R$ tal que $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2$ b) $f: R^2 \rightarrow R^3$ tal que $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1^2)$ c) $f: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1)$ d) $f: R^2 \rightarrow R^3$ tal que $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1)$
	<u>Solución:</u> Para resolverlo habría que aplicar la definición de aplicación lineal a todas ellas para comprobarlo. Veamos: La a) es una forma lineal al ser el conjunto final de la aplicación, el conjunto R. La b) no lo es al ser la imagen de una componente un cuadrado. La c) tampoco ya que la imagen del neutro de R^2 ha de ser el neutro y en este caso es el $(0, 1)$.

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

	Por descarte sería la d)
15	Sea b un número real y sea g la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ dada por: $g(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1, bx_3 - x_1).$ Si el tercer vector columna de la matriz asociada a $g \circ f$ en las bases canónicas es $(-1, 0)$ entonces se verifica: a) $b = 0$ b) $b = -1$ c) $b \neq 1$ d) $b = 1$
	<u>Solución:</u> La matriz asociada a g en las bases canónicas es: $\begin{aligned} g(1, 0, 0) &= (-1, -1) \\ g(0, 1, 0) &= (1, 0) \\ g(0, 0, 1) &= (0, b) \end{aligned}$ que en columnas nos da la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$. La matriz asociada a la aplicación $g \circ f$ es el producto: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ b-1 & -2+2b & -3+3b & -2+2b \end{pmatrix}.$ Como la tercera columna es $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Igualándolas nos da $-3 + 3b = 0 \Rightarrow b = 1$ que es la d)
16	Considérese la ap. lineal f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $f(x_1, x_2) = (2x_1 - 4x_2, 2x_1 + 2x_2)$. Dadas las bases de $\mathbb{R}^2$: $B = \{(-1, 2), (1, -3)\}$ y $B' = \{(-1, -2), (2, 3)\}$ la matriz asociada a la aplicación lineal f en las bases B y B' es: a) $\begin{pmatrix} -22 & 38 \\ -14 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 38 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -22 & 38 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -22 & -1 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$
	<u>Solución:</u> Calculamos $f(-1, 2) = (-6, 2) = a(-1, -2) + b(2, 3) \text{ de donde } a = -22 \text{ y } b = -14$ $f(1, -3) = (10, -4) = a(-1, -2) + b(2, 3) \text{ de donde } a = 38 \text{ y } b = 24$ que en columnas nos da la matriz $\begin{pmatrix} -22 & 38 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$ que es la c)

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

17	Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K, y f una aplicación lineal de V en W. ¿Cuál de estas afirmaciones no es cierta en general? a) Si V_1 es un subespacio vectorial de V, entonces $f(V_1)$ es un subespacio vectorial de W. b) Si W_1 es un subespacio vectorial de W, entonces $f^{-1}(W_1)$ es un subespacio vectorial de V. c) Si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es un sistema libre en V entonces $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ es un sistema libre en W. d) Si $\{f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n)\}$ es un sistema libre en W, entonces $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es un sistema libre en V.
	<u>Solución:</u> Es una pregunta teórica. La respuesta es la d)
18	Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de un espacio vectorial sobre R y sea $B^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ la base dual de B. Si $w = 5\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$, entonces $v_3^*(\vec{w})$ es igual a: a) 1 b) -1 c) -3 d) 5
	<u>Solución:</u> Sabemos que la base dual verifica que $v_i^*(v_j) = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$ Entonces: $v_3^*(w) = v_3^*(5v_1 - v_2 - 3v_3) = 5 v_3^*(v_1) - v_3^*(v_2) - 3v_3^*(v_3) = 5 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$. Por lo tanto, la respuesta es la c)
19	Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de un espacio vectorial sobre R y sea $B^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ la base dual de B. Si $\vec{w} = \alpha(\vec{v}_2 - \vec{v}_3) + \vec{v}_3$, entonces $v_3^*(\vec{w})$ es igual a: a) 1 b) $-\alpha$ c) $-\alpha + 1$ d) 0
	<u>Solución:</u> Sabemos que la base dual verifica que $v_i^*(v_j) = 1$ si $i = j$ y 0 si $i \neq j$ Entonces: $v_3^*(\vec{w}) = v_3^*(\alpha\vec{v}_2 - \alpha\vec{v}_3 + \vec{v}_3) = \alpha v_3^*(\vec{v}_2) - \alpha v_3^*(\vec{v}_3) + v_3^*(\vec{v}_3) = \alpha \cdot 0 - \alpha \cdot 1 + 1 = -\alpha + 1$

Por lo tanto, la respuesta es la c)

Ejercicio final: Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por:

$f(x_1, x_2) = (-11x_1 - 6x_2, 18x_1 + 10x_2)$. Se considera la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ donde:

$$\vec{v}_1 = (2, -3) \quad y \quad \vec{v}_2 = (-1, 2)$$

La matriz asociada en las bases canónicas es:

- a) $\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$ d) Ninguna de las anteriores

Solución: Como $f(1, 0) = (-11, 18)$; $f(0, 1) = (-6, 10)$ estas imágenes en columnas nos dan

la matriz $\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$ que es la c)

Las dimensiones respectivas de los subespacios $\text{Ker } f$ y $\text{Im } f$ son:

- a) 3 y 0 b) 0 y 2 c) 1 y 1 d) 2 y 0

20 Solución: Las columnas de la matriz son un sistema generador de la $\text{Im } f$.

En este caso hay 2, L.I., por lo tanto, $\dim \text{Im } f = 2$.

Por el teorema de las dimensiones, $\dim(\text{Ker } f) = 0$ y la respuesta es la b)

La aplicación lineal es:

- a) No es inyectiva b) Es un isomorfismo c) No es suprayectiva d) Ninguna de ellas

Solución: Como $\dim(\text{Im } f) = 2$, $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ y es suprayectiva, como $\dim(\text{Ker } f) = 0$, es inyectiva y, por tanto, un isomorfismo que es la b)

La matriz asociada a f en la base B de $\mathbb{R}^2$ en el espacio origen y destino:

- a) $\begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$ d) Ninguna de las anteriores

Solución: Calculamos

$$f(2, -3) = (-4, 6) = a(2, -3) + b(-1, 2) \text{ y de aquí } a = -2 \text{ y } b = 0$$

$$f(-1, 2) = (-1, 2) = a(2, -3) + b(-1, 2) \text{ y de aquí } a = 0 \text{ y } b = -2$$

Aplicaciones lineales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
-----------------------	-------------------	---------------

que en columnas nos dan la matriz $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que no es ninguna de ellas. Es la d)

$[f \circ f \circ f](\vec{v}_1)$ es igual a:

- a) $-8\vec{v}_1$ b) $(0, 0)$ c) $8\vec{v}_1$ d) $-6\vec{v}_1$

Solución:

Calculamos $[f \circ f \circ f](\vec{v}_1) = [f \circ f][f(\vec{v}_1)] = [f \circ f][(-4, 6)] =$

$= f[f(-4, 6)] = f(8, -12) = (-16, 24) = -8(2, -3) = -8\vec{v}_1$

que es la opción a)