CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES. SUCESIONES Y SERIES

NOCIONES BÁSICAS SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS

1.- Definición de conjunto

Definición: Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos.

El que esté "bien definida" significa que podemos saber si un objeto cualquiera es o no del conjunto.
Los objetos del conjunto se llaman **elementos.**

Nomenclatura:
- Los conjuntos se representan por letras mayúsculas $A,\ B,\ C,$ …. y los elementos de ellos por minúsculas $a, b, c, \ldots$ ….
- Los elementos que componen un conjunto se encierran entre llaves $A = \{a, b, c, d, e\}$

2.- Formas de definir un conjunto

2.1. Por extensión.

Definición: Un conjunto está definido **por extensión** cuando se enumeran todos y cada uno de los elementos del conjunto. Ejemplo: $A = \{a , e , i , o , u \}$

2.2. Por comprensión

Definición: Un conjunto está definido **por comprensión** cuando damos alguna definición o propiedad que los identifica inequívocamente.
Ejemplo: A = {letras vocales}; B = {meses del año}

2.3. Relación de pertenencia

Definición: Si un elemento "a" pertenece a un conjunto A lo expresaremos mediante símbolos matemáticos, así: a ∈ A, y si no pertenece lo escribiremos: a ∉A.

Ejemplo: Si B = {meses del año}, escribimos $abril \in B$ y $lunes \notin B$

3.- Conjunto unitario

Definición: Es un conjunto formado por un solo elemento.
Se representa A = {a}

Por ejemplo: sea $A = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N}: \boldsymbol{3} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{5}\}$ es decir A es el conjunto de los números naturales comprendidos entre el 3 y el 5 que como sabemos sólo es el 4.
Por lo tanto, A es un conjunto unitario $A = \{4\}$

4.- <u>Cardinal de un conjunto</u>

<u>Definición</u>: Los conjuntos que pueden ser representados por extensión se llaman **finitos**. Los que no lo son se llaman infinitos.
Si un conjunto es finito, se pueden contar sus elementos. Al número de elementos de un conjunto finito se le llama **cardinal del conjunto.**
Ejemplo: $si\ \ B = \{meses\ del\ año\}\ \ entonces\ \ Card(B) = 12$

5.- <u>Conjunto vacío</u>

<u>Definición</u>: Se acepta para que la teoría de conjuntos tenga una estructura algebraica, que existe un conjunto que no tiene elementos y se llama **conjunto vacío.**
Se representa por el símbolo Φ. Su cardinal es 0.
Ejemplo: $A\ = \{x \in N : 3 < x < 4\} =\ \Phi$. No hay ningún número natural entre 3 y 4.

6.- <u>Subconjuntos</u>

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B, decimos que **A es subconjunto de B** si todo elemento de A lo es de B.
Se representa A ⊆B y se lee: A es subconjunto de B o A está incluido en B.
En caso contrario se escribe A ⊄B

7.- <u>Complementario de un conjunto</u>

<u>Definición</u>: Consideramos un conjunto E de referencia. Si A es un subconjunto de E, se define el **complementario** de A respecto a E y se escribe C_EA al subconjunto de E formado por todos los elementos de E que no están en A. En símbolos $A^c\ = C_EA = \{x \in E\ : x \notin A\}$

<u>Ejemplos</u>:

- Si E es el conjunto de los números naturales y A es el subconjunto de los números pares, entonces C_EA es el subconjunto formado por los números impares

- Si E = {letras del abecedario} y A = {vocales}, entonces C_EA = {consonantes}

- Si $E\ =\ R$ y A = [2,6] entonces $C_RA =]-\infty, -2[\cup]6, +\infty[$

8.- <u>Unión de conjuntos</u>

<u>Definición</u>: Dados dos conjuntos A y B se define la **unión** de ellos y se representa $A \cup B$ como el conjunto formado por los elementos que están en A o en B.

Es decir: $A \cup B = \{x \in E\ /\ x \in A\ ó\ x \in B\}$

Ejemplos:

- Sean A, B ⊂ R A = [2,6] y B = [3,10], entonces $A \cup B$ = [2,10]

- Sea $A\ = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ y $B\ = \{2, 4, 8, 10\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 10\}$

9.- **Intersección de conjuntos**

Definición: Dados dos conjuntos A y B se define la **intersección** de ellos y se representa $A \cap B$ como el conjunto formado por los elementos que están en A y en B.

En símbolos $A \cap B \ = \{x \in E \ / \ x \in A \ y \ x \in B\}$

Ejemplos:

- Sean A, B ⊂ R A = [2,6] y B = [3,10], entonces $A \cap B$ = [3,6]

- Sea A = {1, 3, 4, 7, 8} y B = {2, 4, 8, 10}, entonces $A \cap B$ = {4, 8}

Definición: Si los conjuntos no tienen elementos en común su intersección es el conjunto vacío. En este caso los conjuntos se llaman **disjuntos.** $A \cap B = \Phi$

Ejemplo: Si A = [2,6] y B = [8,10] entonces $A \cap B = \Phi$

1.- Números reales. Estructura y propiedades

Los conjuntos numéricos conocidos son:

- Números naturales N:({0,1,2,3,4……})
- Números enteros Z ({……−3, −2, −1,0,1,2,3,4……}),
- Números racionales Q, formado por las divisiones de números enteros $\left(\left\{\frac{a}{b} \ con \ a \ y \ b \ enteros \ y \ b \neq 0\right\}\right)$
- Números reales R formado por la unión de los racionales Q e irracionales I (que son números con infinitas cifras decimales no periódicas): $R = Q \cup I$.
- Números complejos ℂ, que aparecen al resolver ecuaciones con números reales en los que aparece la raíz de un número real negativo.

Entre ellos se establece la relación de inclusión: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. Cada conjunto de éstos está formado por el anterior al que se le han añadido nuevos números.

En este tema nos pararemos a hablar de ℝ- Conjunto de los números reales

Principales características de los números reales:
Operaciones y propiedades: En el conjunto R con las dos leyes de composición internas u operaciones (suma y producto) que le confieren con las propiedades correspondientes, **estructura de cuerpo conmutativo o abeliano**.

Orden: También se establece en R una **relación de orden total**($\leq$)que se lee “menor o igual que” mediante la cual, dos elementos cualesquiera de R siempre se pueden comparar, es decir dados dos números a y b, podemos decir que $a \ \leq \ b$ ó $b \ \leq \ a$ y que es compatible con las operaciones de suma y producto definidas en R, es decir que si:

-- Si $a, b\ y\ c\ \in\ R\ \ y\ a\ \leq\ b$ entonces $a\ +\ c\ \leq\ b\ +\ c$

-- Si $a, b\ y\ c\ \in\ R\ \ y\ c\ \geq\ 0$ entonces $a\cdot c\ \leq\ b\cdot c$

-- Si $a, b\ y\ c\ \in\ R\ \ y\ c\ \leq\ 0$ entonces $a\cdot c\ \geq\ b\cdot c$

2.- <u>Intervalos, semirrectas y entornos (Topología de los números reales)</u>

2.1. Intervalo abierto de extremos a y b (a < b).

<u>Definición</u>: Dados dos números reales a y b con a < b, definimos el **intervalo abierto** que determinan, como el conjunto de números reales comprendidos entre a y b sin coger éstos. Se escribe así:

$(a, b) =]a, b[= \{x \in R\ /\ a < x < b\}$. Ejemplo $(2{,}5) =]2{,}5[$

2.2. Intervalo cerrado de extremos a y b (a < b).

<u>Definición</u>: Dados dos números reales a y b con a < b, definimos el **intervalo cerrado** que determinan, como el conjunto de números reales comprendidos entre a y b tomando estos. Se escribe así:

$[a, b] = \{x \in R\ /\ a \leq x \leq b\}$. Ejemplo $[2{,}5]$

2.3. Intervalo semiabierto o semicerrado de extremos a y b (a < b).

<u>Definición</u>: Dados dos números reales a y b con a < b, definimos el **intervalo semiabierto o semicerrado** que determinan, como el conjunto de números reales comprendidos entre a y b cogiendo uno de ellos según esté abierto o cerrado esa parte del intervalo. Se escribe así:

$[a, b[= \{x \in R\ /\ a \leq x < b\}$ Ejemplo: $[2{,}5[$

$]a, b] = \{x \in R\ /\ a < x \leq b\}$ Ejemplo: $]2{,}5]$

2.4. Semirrectas

<u>Definición</u>: Llamaremos **semirecta** al conjunto de números reales mayores (mayores o iguales) o menores (menores o iguales) que uno fijo dado.

$]-\infty, a[= \{x \in R\ /\ x < a\}$ Ejemplo: $]-\infty, 2[$. Son los números menores que 2

$]a, +\infty[= \{x \in R\ /\ x > a\}$ Ejemplo: $]a, +\infty[$. Son los números mayores que 2

$]-\infty, a] = \{x \in R\ /\ x \leq a\}$ Ejemplo: $]-\infty, 2]$. Son los números menores o iguales que 2

$[a, +\infty[= \{x \in R \ / \ x \geq a\}$ Ejemplo: $[2, +\infty[$. Son los números mayores o iguales que 2

2.5. Entorno de centro "a" y radio "r". E_r(a)

Definición: Dados dos números reales $a, r \in \mathbb{R}, r > 0$, el **entorno de centro a y radio r** es el conjunto de números reales comprendidos entre $a + r \ y \ a - r$.

Es decir, $E_r(a) = \{x \in R \ / \ a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r) =]a - r, a + r[$

Ejemplo: $E_3(2) = \{x \in R \ / \ 2 - 3 < x < 2 + 3\} = (-1{,}5) =]-1{,}5[$

3.- Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Definición: Una **inecuación** es la relación entre dos expresiones algebraicas por uno de estos 4 símbolos $(<, >, \leq, \geq)$
El **grado de la inecuación** será el grado mayor de las dos expresiones algebraicas involucradas en ella.
Resolución de inecuaciones de grado 1: Se resuelven de forma similar a las ecuaciones, pero se procurará que al final cuando haya que despejar la incógnita, su coeficiente sea positivo para evitar cambios en la desigualdad.

1	Resolver $3 - 2x \geq 8 - 7x$
	Solución: Agrupamos monomios semejantes: $-2x + 7x \geq 8 - 3 \Rightarrow 5x \geq 5 \Rightarrow x \geq 1$. Las soluciones son todos los números mayores o iguales que 1. Se puede poner como $[1, +\infty[$
2	Resolver $3x + 7 < 5x - 11$
	Solución: Agrupamos monomios semejantes: $3x - 5x < -11 - 7 \Rightarrow -2x < -18 \Rightarrow x > 9$.(*) Obsérvese que en último paso se ha cambiado el signo de la desigualdad porque al dividir por -2 que es negativo, la desigualdad cambia de sentido. Para no tener problema podríamos haber hecho lo siguiente. Estamos en $-2x < -18$. Cambiamos de miembro: $18 < 2x \Rightarrow 9 < x$ que coincide con (*). La solución de esta inecuación es $]9, +\infty[$

Ejercicios propuestos con solución:

1.- $5x + 6 < 3x - 8$	**Sol:** $]-\infty, -7[$
2.- $2(x + 1) - 3(x - 2) < x + 6$	**Sol:** $]1, +\infty[$
3.- $10(x + 1) + x \leq 6(2x + 1)$	**Sol:** $[4, +\infty[$

4.- $\frac{5x-3}{4} + 2(x+1) < \frac{8x+9}{3}$	**Sol:** $]-\infty, 3[$
5.- $\frac{x-7}{6} > \frac{x}{4} - \frac{x+2}{3} - 1$	**Sol:** $]-2, +\infty[$
6.- $\frac{x-3}{2} + 4 < \frac{x+9}{3}$	**Sol:** $]-\infty, 21[$

4.- Sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita

Definición: Están formados por dos o más inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Forma de resolución: Para resolverlos se calcula el valor de la incógnita de manera independiente de cada inecuación y después se buscan los números reales comunes en ambas.

Ejemplo 1: Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 \geq -1 \end{array}\right\}.$

Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 \geq -1 \end{array}\right\}.$	Solución: De la primera inecuación, obtenemos como solución la semirrecta $[-1, +\infty[$ De la segunda inecuación, obtenemos como solución la semirrecta $]-\infty, 3]$ Como es un sistema se han de buscar los valores de x que sean comunes a las dos semirrectas y éstos son $[-1,3]$. Si se dibuja se deduce mejor
Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 < -1 \end{array}\right\}$	Solución: De la primera inecuación, obtenemos como solución la semirrecta $[-1, +\infty[$ De la segunda inecuación, obtenemos como solución la semirrecta $]3, +\infty[$ La intersección de estas dos semirrectas nos da el intervalo $]3, +\infty[$ que es la solución
Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+3 < 1 \\ -x+6 < 3 \end{array}\right\}$	Solución: De la primera inecuación, obtenemos como solución la semirrecta $]-\infty, -1[$ De la segunda inecuación, obtenemos como solución la semirrecta $]3, +\infty[$ La intersección de estas dos semirrectas no nos da ningún punto, por lo tanto, el sistema no tiene solución

5.- Conjuntos acotados

Definición: Sea A un conjunto de números reales, es decir un subconjunto de R.
Decimos que A **está acotado superiormente** si existe un número real **"b"** que es mayor o igual que todos los elementos de A, es decir: $\forall x \in A \quad es \quad x \leq b$

Al número b se le llama **"cota superior"** de A

Ejemplo 1:

Sea $A =]2,5[$. Se cumple que todo número mayor o igual que 5 es una cota superior ya que el 5 es mayor que todos los elementos de A.

Ejemplo 2:

Sea $A = [1,9]$. Se cumple que todo número mayor o igual que 9 es una cota superior ya que el 9 es mayor o igual que todos los elementos de A

Definición: Sea A un conjunto de números reales, es decir un subconjunto de R. Decimos que A **está acotado inferiormente** si existe un número real **"a"** que es menor o igual que todos los elementos de A. En símbolos: $\forall x \in A \quad es \quad x \geq a$

Al número a se le llama **"cota inferior"** de A

Ejemplo 3:

Sea $A =]2,5[$. Se cumple que todo número menor o igual que 2 es una cota inferior ya que el 2 es menor que todos los elementos de A.

Ejemplo 4:

Sea $A = [1,9]$. Se cumple que todo número menor o igual que 1 es una cota inferior ya que el 1 es menor o igual que todos los elementos de A

Definición: Diremos que A es un **conjunto acotado** si lo está superior e inferiormente

Ejemplo 5:

Los conjuntos $]2,5[$ y $[1,9]$ son conjuntos acotados

Ejemplo 6:

No está acotado superiormente pero sí inferiormente, el conjunto $]a, +\infty[$; y no está acotado inferiormente pero sí superiormente el conjunto $]-\infty, 2]$. Por lo tanto, no son conjuntos acotados.

Definición: Llamaremos **supremo a** la menor de las cotas superiores y si pertenece al conjunto se le llama **"máximo"**

Ejemplo 7: En el conjunto $]2,5[$ el 5 es el supremo, pero no es máximo

Ejemplo 8: En el conjunto $[1,9]$ el 9 es el máximo porque pertenece al conjunto

<u>Definición</u>: Llamaremos **ínfimo a** la mayor de las cotas inferiores y si pertenece al conjunto se le llama **"mínimo"**

<u>Ejemplo 9</u>: En el conjunto $]2,5[$ el 2 es el ínfimo, pero no es mínimo

<u>Ejemplo 10</u>: En el conjunto $[1,9]$ el 1 es el mínimo porque pertenece al conjunto

6.- <u>Valor absoluto de un número. Métrica en $\mathbb{R}$</u>

En el análisis de conjuntos es importante ver si podemos medir los elementos que allí están, y ver si podemos establecer distancias entre estos elementos, esto se hace a través de métricas, que en el caso de los números reales hay una muy utilizada que es el valor absoluto.

<u>Definición</u>: Dado un número real "x" se define su **valor absoluto** que se escribe

$$|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo: a) $|5| = 5$ b) $|-7| = 7$

<u>Propiedades del valor absoluto</u>:

a) $|z| = |-z| \geq 0$

b) $-|z| \leq z \leq |z|$

c) Si $|z| = a \iff z = a$ ó $z = -a$

d) $|z| = 0 \iff z = 0$

e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

f) $|x + y| \leq |x| + |y|$

g) $|(|x| + |y|)| \leq |x - y|$

h) Si $|z| < a$ entonces $-a < z < a \iff z \in (-a, a)$.

i) Si $|z| > a$ entonces $-a > z > a \iff z \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

Ejemplo del c): Calcular los valores de "x" tales que: $\|2x-1\| = 5$.	**Solución:** $2x-1=5$ ó $2x-1=-5$. De la primera $2x = 6$; $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$. De la segunda $2x=-4$; $\boldsymbol{x} = \mathbf{-2}$
Ejemplo del h): Calcular los valores de "x" tales que: $\|2x-1\| < 5$.	**Solución:** Si $\|2x-1\| < 5$, entonces: $-5 < 2x - 1 < 5$. Pasando el 1 a los dos lados queda: $-4 < 2x < 6$ y, dividiendo por 2: $-2 < x < 3$. La solución es el intervalo: $(-2,3)$
Ejemplo del i) Calcular los valores de "x" tales que: $\|2x-1\| > 5$.	**Solución:** Si $\|2x-1\| > 5$, entonces: -5 > 2x -1 > 5. Pasando el 1 a los dos lados queda: $-4 > 2x > 6$ y dividiendo por 2: $-2 > x > 3$ La solución son los intervalos: $(-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$

7.- <u>Punto interior de un conjunto</u>

<u>Definición</u>: Dado un número real $x \in \mathbb{R}$ y un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, diremos que **x es un punto interior** de A si podemos encontrar un intervalo abierto (a,b) que cumple que $x \in (a,b)$ y $(a,b) \subseteq A$

Ejemplo 1: Si $A =]2{,}5[$, todos sus puntos son interiores

Ejemplo 2: Si $A = [2{,}5[$, todos sus puntos excepto el 2 son interiores

Ejemplo 3: Si $A = [1{,}9]$, todos sus puntos excepto el 1 y el 9 son interiores

<u>Definición</u>: Al conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto se le llama el **interior** de él y se representa como $\overset{0}{A}$.

Ejemplo: Si $A = [1{,}9]$ entonces $\overset{0}{A} = (1{,}9)$

8.- <u>Conjunto abierto</u>.

<u>Definición</u>: Un conjunto A es **abierto**, si todos sus puntos son interiores

Ejemplo 1: Si $A = (1{,}9)$ entonces A es abierto

Ejemplo 2: Si $A = [1{,}9]$, entonces A no es abierto

Ejemplo 3: Son conjuntos abiertos, los intervalos abiertos, las semirrectas abiertas, el conjunto R y el conjunto vacío (aquél que no tiene elementos) y que representamos por Φ

9.- <u>Propiedades de los conjuntos abiertos</u>

- La unión arbitraria de abiertos es un conjunto abierto.
- La intersección finita de abiertos es conjunto abierto.

10.- <u>Conjuntos cerrados</u>

<u>Definición</u>: Un conjunto C es cerrado si su complementario es **abierto**, siendo el complementario que se escribe $C^c = R - C$

Son conjuntos cerrados, el conjunto R (números reales), el conjunto vacío Φ, los intervalos cerrados y las semirrectas cerradas

11.- <u>Propiedades de los conjuntos cerrados</u>.

- La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
- La intersección infinita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

12.- <u>Punto adherente de un conjunto</u>

<u>Definición</u>: Dado un conjunto A y un punto x no necesariamente de A, se dice que **x es adherente** a A si cualquier intervalo (a, b) que contenga a x, tiene puntos de A.

<u>Ejemplo 1</u>: Si A = (1,9), todos los puntos, incluidos el 1 y el 9 son puntos adherentes ya que en estos casos, cualquier intervalo que contenga al 1 o al 9, también contiene puntos de A

<u>Ejemplo 2</u>: Si A = $(1,4) \cup \{7\}$, todos los puntos incluidos el 1, 4 y 7 son adherentes ya que cualquier intervalo que contenga al 1, al 4 y al 7 también contiene puntos de A. En el caso del 7 puede haber intervalos que sólo tengan en común con A, al número 7

<u>Definición</u>: Al conjunto de todos los puntos adherentes al conjunto A, se le llama **"adherencia"** de A y se representa $\bar{A}$, es decir: $\bar{A} = \{x \in R \ / \ x \ es \ un \ punto \ adherente \ de \ A\}$

EJERCICIOS CONJUNTOS ACOTADOS

1	Calcular el supremo y el ínfimo del conjunto A = $\{x \in R : x^2 < 9\}$
	Solución: Los números reales cuyo cuadrado es menor que 9, son los comprendidos entre -3 y 3, es decir, $A = \{x \in R : -3 < x < 3\}$. Cualquier número mayor o igual que 3 es cota superior. La más pequeña es el 3, por lo tanto, este valor es el supremo. No sería máximo porque no pertenece al conjunto A. Análogamente, todo número menor o igual que -3 sería una cota inferior. La mayor de ellas que es el -3 sería el ínfimo. No sería mínimo porque no es del conjunto A
2	Estudiar la acotación del conjunto A = $\{x \in R \ / \ \ x^2 \leq 9\}$
	Solución: Los números reales cuyo cuadrado es menor o igual que 9, son los comprendidos entre -3 y 3 es contando éstos, es decir A = { x ∈R / $-3 \leq$ x ≤ 3 }. Cualquier número mayor o igual que 3 es cota superior. La más pequeña es el 3 por lo tanto este valor sería el supremo, pero como pertenece al conjunto A, sería el máximo. Análogamente, todo número menor o igual que -3 sería una cota inferior. La mayor de ellas que es el -3sería el ínfimo, pero como pertenece al conjunto A es el mínimo
3	Resolver $\|x\|^2 = 3$.
	Solución: Despejando $\|x\| = \pm\sqrt{3}$. Como no puede ser que $\|x\| = -\sqrt{3}$ por ser un número negativo, nos quedaría como única opción que $\|x\| = \sqrt{3}$ y de aquí los dos posibles valores serían $\pm\sqrt{3}$.
4	Resolver $\|x + 5\| + 1 = 0$
	Solución: Es el conjunto vacío ya que el valor absoluto es un número positivo o 0 y al sumarle 1 nos daría un número mayor o igual que 1. Por lo tanto, no puede ser igual a 0.
5	Averiguar los puntos interiores del conjunto A = $[2,7) \cup \{8\}$
	Solución: Cualquier punto del intervalo abierto (2,7) es interior a A. El 7 no lo es porque no pertenece al conjunto y el 2 y 8 tampoco lo son porque para que lo fueran tendría que haber un intervalo abierto que los contenga a ellos y además dicho intervalo tendría que estar contenido en A y esto no se cumple. Luego el interior de A es (2,7)
6	$[-2,4]$ es abierto o cerrado o las dos cosas o ninguna
	Solución: Es cerrado porque su complementario que es $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ es abierto por ser la unión de los abiertos

13.- SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES.

Definición: Una **sucesión de números reales** es un conjunto infinito y ordenado de números reales: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots\ldots.a_n\ldots$.. A cada elemento se le llama **término**. Esta definición nos conduce también a poder expresarla rigurosamente como:

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto N de los números naturales en el conjunto de los números reales R

$$\begin{array}{rccc} f: & N & \to & R \\ & n & \to & a_n \end{array}$$

donde a_n es el **término general de la sucesión**, que es la expresión que nos da el valor de cada término en función del lugar que ocupa.

En la expresión a_n, "n" representa el lugar que ocupa el término y "a_n" el valor de él

Ejemplo 1: Sea la sucesión $a_n = \frac{n+3}{n}$. Dándole valores a la n, obtenemos los distintos términos de la sucesión. Así para n = 1, 2, 3,… $a_1 = \frac{4}{1} = 4 \quad a_2 = \frac{5}{2} \quad a_3 = \frac{6}{3} = 2\ldots$

Ejemplo 2: Sea la sucesión cuyo término general es $a_n = n^2 + 2$. Dándole valores a la n, obtenemos los distintos términos de la sucesión. Así para n = 1, 2, 3,… obtenemos $a_1 = 3 \quad a_2 = 6 \quad a_3 = 11 \quad a_4 = 18$ ……….

14.- Monotonía

La monotonía nos indica cuando una sucesión crece o decrece. En base a ello podemos distinguir los siguientes tipos:
Definiciones:
14.1. Una sucesión $a_n$es **creciente** si cada término es mayor o igual que el anterior.

En símbolos: $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in N$. Ejemplo: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ……. (de Fibonacci)

14.2. Una sucesión $a_n$es **estrictamente creciente** si cada término es mayor que el anterior.

En símbolos: $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in N$. Ejemplo: 1, 4, 9, 16, 25, 36, …………

14.3. Una sucesión $a_n$es **decreciente** si cada término es menor o igual que el anterior.

En símbolos: $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in N$. Ejemplo: 10, 7, 7, 4, 1, 1, 1, …….

14.4. Una sucesión $a_n$es **estrictamente decreciente** si cada término es menor que el anterior.

En símbolos: $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in N$. Ejemplo: 10, 7, 4, 1, -2 , -5 , -8 ……….

14.5. Una sucesión es **monótona** si cumple cualquiera de los 4 apartados anteriores

Hay sucesiones que no son monótonas, por ejemplo: $1\ ,\ -4\ ,\ 9\ ,\ -16\ ,\ 25\ ,\ -36\ldots\ldots\ldots$ ó la sucesión $1\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ -1\ldots\ldots\ldots$ y se les llama **"oscilantes"**

Otras sucesiones tienen todos sus términos iguales por ejemplo: 2 , 2 , 2 , 2 , 2 ……..y se les llama **"constantes"**

15.- Sucesiones acotadas

Definición: Una sucesión de números reales **está acotada superiormente** si existe un número real "b" que es mayor que todos los términos de la sucesión. En símbolos: $a_n \leq b \quad \forall n \in N$

Ejemplo 1: En la sucesión de término general $a_n = \frac{2n-1}{n}$, observamos que la división, nunca es mayor que 2, luego todo número mayor o igual que 2 es una cota superior y en consecuencia la sucesión está acotada superiormente

Ejemplo 2: En la sucesión de término general $a_n = n^2 + 2$, observamos que a medida que la "n" toma valores cada vez más grandes, los términos de la sucesión, también se hacen tan grandes como se quiera. En consecuencia, esta sucesión no está acotada superiormente.

Definición: Una sucesión de números reales **está acotada inferiormente** si existe un número real "a" que es menor que todos los términos de la sucesión. En símbolos: $a_n \geq b \quad \forall n \in N$

Ejemplo 1: En la sucesión de término general $a_n = \frac{1}{n}$, observamos que la división siempre es positiva, aunque su valor va disminuyendo a medida que aumenta la "n". Por lo tanto, cualquier número menor o igual que 0 es una cota inferior y la sucesión está acotada inferiormente

Ejemplo 2: En la sucesión de término general $a_n = -n^2 + 2$, observamos que a medida que la "n" toma valores cada vez más grandes, los términos de la sucesión, los términos de la sucesión toman valores negativos y llegan a hacerse tan pequeños como se quiera. En consecuencia, esta sucesión no está acotada inferiormente.

Definición: Una sucesión está **acotada** si lo está superior e inferiormente

Ejemplo: En la sucesión de término general $a_n = \frac{1}{n}$, observamos que la división toma como valor máximo el 1 y cualquier número mayor o igual que él es una cota superior. Además, su valor va disminuyendo a medida que aumenta la "n". Por lo tanto, cualquier número menor o igual que 0 es una cota inferior y por lo tanto la sucesión está acotada

Nota: si una sucesión es **monótona creciente siempre estará acotada inferiormente** ya que en este caso el primer término será el de menor valor y por lo tanto será una cota inferior y si es monótona decreciente, lo estará superiormente porque el primer término será el que más valga y será por consiguiente una cota superior

16.- Límite de una sucesión

Definición: Se dice que la sucesión $\{a_n\}$tiende o **tiene por límite el número "l"** o **converge a "l"**, y se escribe $\{a_n\} \to l$ ó $\lim_n a_n = l$ cuando se cumple que para cualquier cantidad $\varepsilon > 0$ número real por muy pequeño que sea, los términos de la sucesión a partir de uno de ellos pertenecen al entorno de centro "l" y radio ε.

$$\lim_n a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ , \quad \exists\ n_0 \in N \quad / \quad \forall\ n \geq n_0 \ , \quad a_n \in \ (l - \varepsilon \ , \ l + \varepsilon)$$

Una sucesión que tenga por límite un número finito se llama **convergente.**

Ejemplo 1: Consideremos la sucesión de término general $a_n = \frac{n-1}{n}$. Algunos de sus términos serían: 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$;……..; 0,9 ;……..0,99 ; …..0,999 ; ……0,9999……

Observamos que los términos de la sucesión se aproximan cada vez más a 1. Este punto es límite de esta sucesión porque tomando cualquier cantidad ε por pequeña que sea, por ejemplo 0,01; 0,001 etc los términos de la sucesión a partir de uno de ellos, llegan a estar del número 1 una distancia menor todavía que el ε tomado. Diremos que $\lim_n \frac{n-1}{n} = 1$

Una sucesión que cumpla que sus términos a partir de uno superan a un número fijado previamente por grande que sea se dice que tiene por límite $+\infty$

$$\lim_n a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall b \in R \ , \quad \exists\ k \in N \quad / \quad \forall\ n \geq k \ , \quad a_n \geq b$$

Ejemplo 2: Sea la sucesión $a_n = n^2 + 2$. Dándole a n valores suficientemente grandes, los términos de la sucesión superan a cualquier número por grande que sea.

Una sucesión que cumpla que sus términos a partir de uno son menores que cualquier número fijado previamente por pequeño que sea se dice que tiene por límite $-\infty$
En símbolos: $\lim_n a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall b \in R \ , \quad \exists\ k \in N \quad / \quad \forall\ n \geq k \ , \quad a_n \leq b$

Ejemplo 3: Sea la sucesión $a_n = -n^2 + 2$. Dándole a n valores suficientemente grandes, los términos de la sucesión son menores que cualquier número por pequeño que sea

En cualquiera de estos casos, la sucesión se dice **divergente.**

17.- Teorema de unicidad. El límite de una sucesión, si existe es único

18.- Propiedades de los límites

Si $\lim_n a_n = a$ y $\lim_n b_n = b$ entonces se cumple que:

a) $\lim_n (a_n \pm b_n) = a \pm b$ b) $\lim_n (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$ c) $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $si\ b \neq 0$

19.- Cálculo límites de sucesiones

19.1. El límite de un polinomio es siempre $+\infty$ ó $-\infty$ según que el coeficiente de mayor grado sea positivo o negativo

Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty}(3n^2-5n+1)=+\infty \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(-n^3+2n^2-5n+6)=-\infty$

19.2. El límite de cualquier expresión de la forma $\frac{k}{n^\alpha} \quad \alpha \geq 0$ es 0

Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}=0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}=0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{6}{n}\right)=0$

20.-Indeterminaciones

Son expresiones de las que no se sabe el resultado de la operación. Son siete. A saber

$$\frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0\cdot\infty; \quad \infty-\infty; \quad 1^\infty; \quad 0^0; \quad \infty^0$$

21.- Cálculo de límites con indeterminaciones

21.1. Indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

El límite del cociente de dos polinomios presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. El límite se calcula dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de la "n". Después de simplificar se vuelve a calcular el límite.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+8n-2}{4n+3}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{n}\frac{\frac{3n^2+8n-2}{n^2}}{\frac{4n+3}{n^2}}=\lim\limits_{n}\frac{3+\frac{8}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{3+0-0}{0+0}=\frac{3}{0}=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n^2+n-12}{3n+5}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim\limits_{n}\frac{\frac{-6n^2+n-12}{n^2}}{\frac{3n+5}{n^2}}=\lim\limits_{n}\frac{-6+\frac{1}{n}-\frac{12}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{-6+0-0}{0+0}=\frac{-6}{0}=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+5}{2n^3-5n^2+8n+7}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{n}\frac{\frac{n^2+2n+5}{n^3}}{\frac{2n^3-5n^2+8n+7}{n^3}}=\lim\limits_{n}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{2-\frac{5}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{7}{n^3}}=\frac{0}{2}=0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-8n+5}{2n^2+6n+1}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{n}\frac{\frac{4n^2-8n+5}{n^2}}{\frac{2n^2+6n+1}{n^2}}=\lim\limits_{n}\frac{4-\frac{8}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4-0+0}{2+0+0}=\frac{4}{2}=2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-5n^3-4n+1}{2n^3-5n^2+8n+7}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim\limits_{n}\frac{\frac{-5n^3-4n+1}{n^3}}{\frac{2n^3-5n^2+8n+7}{n^3}}=\lim\limits_{n}\frac{-5-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{5}{n}+\frac{8}{n^2}+\frac{7}{n^3}}=\frac{-5-0+0}{2-0+0+0}=\frac{-5}{2}$

Como regla general:

- **El límite es $+\infty$ o $-\infty$ si el grado del numerador es mayor que el del denominador.**

- **Es 0 si el grado del denominador es mayor que el del denominador**
- **Es igual al cociente de los coeficientes de los monomios de mayor grado si los polinomios son del mismo grado**.

21.2. También se presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ en el límite del cociente de dos expresiones algebraicas donde al menos una de ellas contiene expresiones irracionales. Se resuelve igual que el apartado anterior, comparando los exponentes mayores de ambas. Hay que tener en cuenta a la hora de comparar las potencias de la "n" que en el caso de un radical se cumple $\sqrt[q]{n^p} = n^{\frac{p}{q}}$

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{16n^2-5n+1}}{2n+6} = \frac{4}{2} = 2$

(Téngase en cuenta que en el numerador, la mayor potencia es $\sqrt{16n^2}$ que equivale a 4n)

b) $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{16n^4-5n^3+n}}{3n^2+6n-2} = \frac{4}{3}$ (Igual que antes $\sqrt{16n^4}$ equivale a $4n^2$)

c) $\lim\limits_{n} \frac{2n\cdot\sqrt{16n^2-5n\ \ +3}}{3n^2+6n-2} = \frac{8}{3}$

(En este caso el numerador es de grado 2. Uno por el que está fuera de la raíz y otro por el de dentro que se están multiplicando)

d) $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{16n^2-5n+1}}{3n^2+6} = 0$ (el de arriba es de grado 1 y el de debajo de grado 2)

e) $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt[3]{n^4-6n^3+5n-9}}{5n^2+3n-7} = 0$

(Aquí el denominador es de grado 2 y el numerador de grado $\frac{4}{3}$ $\quad que \quad es < 2$)

f) $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt[3]{n^7-6n^5+5n^2-9}}{5n^2+3n-7} = +\infty$

(Aquí el denominador es de grado 2 y el numerador de grado $\frac{7}{3}$ $\quad que \quad es > 2$)

g) $\lim\limits_{n} \frac{\sqrt{9n^2-7n+3}}{\sqrt{4n^2-5n+2}+6n} = \frac{3}{2+6} = \frac{3}{8}$

(El mayor exponente se encuentra en $\sqrt{9n^2}$, en $\sqrt{4n^2}$ y en el 6n ; todos ellos de grado 1)

21.3. Indeterminaciones de la forma $+\infty - \infty$

21.3.1 Se pueden presentar bajo la forma de una resta de fracciones algebraicas donde el límite de cada una es ∞. En este caso se resuelve la resta y se transforma en cociente de polinomios que ya sabemos resolver

Ejemplo 1: $\lim_n \left(\frac{4n^2+3n}{2n+5} - \frac{2n^2-n+3}{n+2}\right) = +\infty - \infty$. Se resuelve operando la resta

$$\lim_n \left(\frac{4n^2+3n}{2n+5} - \frac{2n^2-n+3}{n+2}\right) = \lim_n \frac{(4n^2+3n)(n+2)-(2n^2-n+3)(2n+5)}{(2n+5)(n+2)} =$$

$$= \lim_n \frac{4n^3+11n^2+6n-4n^3-8n^2-n-15}{2n^2+9n+10} = \lim_n \frac{3n^2+5n-15}{2n^2+9n+10} = \frac{3}{2}$$

21.3.2. También se puede presentar bajo la forma de una resta donde uno o los dos elementos que la componen son expresiones irracionales. Para resolverlo **se multiplica y divide por el conjugado**:

Ejemplo 1: $\lim_n\left[\sqrt{9n^2+7n-2} - 3n\right] = +\infty - \infty = \lim_n \frac{\left[\sqrt{9n^2+7n-2}-3n\right]\left[\sqrt{9n^2+7n-2}+3n\right]}{\sqrt{9n^2+7n-2}+3n} =$

$$= \lim_n \frac{9n^2+7n-2-9n^2}{\sqrt{9n^2+7n-2}+3n} = \lim_n \frac{7n-2}{\sqrt{9n^2+7n-2}+3n} = \frac{+\infty}{+\infty+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \frac{7}{3+3} = \frac{7}{6}$$

Ejemplo 2: $\lim_n\left[\sqrt{4n^2+7n} - \sqrt{4n^2-5n+1}\right] = +\infty - \infty =$

$$= \lim_n \frac{\left(\sqrt{4n^2+7n} - \sqrt{4n^2-5n+1}\right)\left(\sqrt{4n^2+7n} + \sqrt{4n^2-5n+1}\right)}{\sqrt{4n^2+7n} + \sqrt{4n^2-5n+1}} = \lim_n \frac{4n^2+7n-(4n^2-5n+1)}{\sqrt{4n^2+7n}+\sqrt{4n^2-5n+1}}$$

$$= \lim_n \frac{12n-1}{\sqrt{4n^2+7n}+\sqrt{4n^2-5n+1}} = \frac{+\infty}{+\infty} =$$

Como el numerador y denominador son del mismo grado (que es 1) el límite es el cociente de los coeficientes de las expresiones que portan el grado mayor. En este caso $= \frac{12}{2+2} = \frac{12}{4} = 3$

<u>CALCULA LOS SIGUIENTES LÍMITES DE SUCESIONES (1):</u>

1) $lim(3n^2+6n-3)$	2) $lim(-2n^2+5n-4)$	3) $lim\left(4+\frac{2}{n}\right)$	4) $lim\left(\frac{3}{n}+\frac{-6}{n^2}\right)$
5) $lim\sqrt{3n^2-2n+6}$	6) $lim\sqrt{16+\frac{3}{n}}$	7) $lim\sqrt[3]{27+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}$	8) $lim\frac{5n^2+3n}{n^2+6n-2}$
9) $lim\frac{4n+8}{12n-9}$	10) $lim\frac{5n^2+6n-7}{n^3+4}$	11) $lim\frac{3n^3-9n+1}{4n^2+6}$	12) $lim\frac{-2n^3-9}{n^2+5n}$

13) $\lim \frac{6n-9}{\sqrt{4n^2+1}}$	14) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^4+2n}}{6n^2-2}$	15) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2+1}\right)$	16) $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$
17) $\lim\left(n-\sqrt{n^2+10n}\right)$	18) $\lim \frac{(n^2+2)(n^2-2)}{(n+2)^2(2n-1)^2}$		

SOLUCIONES

1) $+\infty$	2) $-\infty$	3) 4	4) 0
5) $+\infty$	6) 4	7) 3	8) 5
9) 1/3	10) 0	11) $+\infty$	12) $-\infty$
13) 3	14) 0	15) 1	16) 0
17) -5	18) ¼		

22.- <u>SERIES DE NÚMEROS REALES</u>

<u>Definición</u>: Dada una sucesión de números reales a_1 , a_2 , a_3 ,…….. a_n….. se llama **serie** de término general

a_n a la sucesión $S_1, S_2, S_3, \dots\dots S_n, \dots\dots\dots$ donde:

$$S_1 = a_1\ ,\quad S_2 = a_2 = a_1 + a_2\ , \dots\dots\dots, S_n = a_1 + a_2 + \cdots \dots .. + a_n$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ tiene límite es decir $\lim_n S_n = S$ la serie se llama **convergente** y S es la suma de la serie. Si $\lim_n S_n = \infty$ la serie se llama **divergente**. Se representa así $\sum_1^\infty a_n$

23.- <u>Condición necesaria de convergencia</u>

<u>Proposición</u>: Dada la serie de término general a_n que se escribe $\sum_1^\infty a_n$. La <u>condición necesaria</u> para que la serie sea convergente es $\boldsymbol{\lim_n a_n = 0}$. Nótese que es una condición necesaria, es decir podemos encontrar series con límite 0 y ser divergentes. Ejemplo: $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$

24.- <u>Criterios de convergencia para series de términos positivos</u>

a) De la serie minorante y mayorante (o Lema del Sandwich)

Dadas dos sucesiones de números reales positivos a_n y b_n que verifican que a partir de cierto término "k" los términos de a_n son menores o iguales que los de b_n.

En símbolos $\exists k \in N \quad / \ \forall n \geq k \quad es \quad a_n \leq b_n$. Entonces:

a.1. Si la serie de término general b_n es convergente, la de término general a_n también

a.2. Si la serie de término general a_n es divergente, la de término general b_n también

Sabiendo que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente, calcula el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$

Solución: Como se cumple que $\frac{1}{n^3}\leq\frac{1}{n^2}\quad\forall n\geq 1$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente, entonces por a.1, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ también lo es

Sabiendo que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, calcula el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Solución: Como se cumple que $\frac{1}{n}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\quad\forall n\geq 1$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, entonces por a.2, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ también lo es

Calcular por comparación el carácter de las series:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^3}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$

Solución:

a) Es convergente por comparación con la $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ ya que $\frac{1}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2}\quad\forall n\geq 1$
b) Es convergente por comparación con la $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ ya que $\frac{n+1}{n^3}\leq\frac{n+n}{n^3}=\frac{2}{n^2}\quad\forall n\geq 1$
c) Es divergente por comparación con la $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ ya que $\frac{1}{\ln n}\leq\frac{1}{n}\quad\forall n\geq 1$

b) De **D'Alembert o del cociente**

Sea la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Si se cumple que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ con $l<1$ la serie es convergente. Si $l>1$ la serie es divergente y si $l=1$ es un caso dudoso

Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3^n}$

Solución: Aplicamos el criterio de D'Alembert: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{n\cdot 3^{n+1}}=$

$=\lim_{n}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{n\cdot 3^{n+1}}=\lim_{n}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$ y la serie es convergente

Aplicando D'Alembert calcula el carácter de la serie de término general $a_n=\frac{n^2+1}{n\cdot 5^n}$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{n\cdot 5^n}}=\lim_{n}\frac{(n^2+2n+2)\cdot n\cdot 5^n}{(n^2+1)(n+1)\cdot 5^{n+1}}=$$

$$= \lim_n \frac{(n^2+2n+2)\cdot n\cdot 5^n}{(n^2+1)(n+1)\cdot 5^{n+1}} = \lim_n \frac{n^3+2n^2+2n}{5(n^3+n^2+n+1)} = \frac{1}{5} < 1$$ y la serie es convergente
Aplicando D'Alembert calcula el carácter de la serie de término general $a_n = \frac{2n+3}{n\cdot 7^n\cdot(n+1)}$
Solución: $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)+3}{(n+1)\cdot 7^{n+1}\cdot(n+1+1)}}{\frac{2n+3}{n\cdot 7^n\cdot(n+1)}} = \lim_n \frac{(2n+5)\cdot(n+1)\cdot n\cdot 7^n}{(2n+3)(n+2)\cdot(n+1)\cdot 7^{n+1}} =$$ $$= \lim_n \frac{2n^2+5n}{7\cdot(2n^2+7n+6)} = \frac{1}{7} < 1$$ y la serie es convergente

c) De **Cauchy o de la raíz**

Sea la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Si se cumple que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ con $l < 1$ la serie es convergente. Si $l > 1$ la serie es divergente y si $l = 1$ es un caso dudoso

Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}$
Solución: Aplicamos el criterio de la raíz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_n \frac{2}{n} = 0 < 1$ y la serie es convergente

PROBLEMAS RESUELTOS:

1	Considere los conjuntos de números reales A = $(-\infty, 4]$ y B = $[8, +\infty)$. Se verifica a) El conjunto $A \cap B$ es cerrado b) 8 es un punto interior de $A \cup B$ c) El conjunto A es abierto d) Ninguna de las anteriores
	Solución: Como los conjuntos no tienen puntos en común, $\boldsymbol{A \cap B = \Phi}$ que sabemos que es cerrado. Por lo tanto, la a) es la respuesta correcta. La b) no es ya que $\boldsymbol{A \cup B} = (-\infty, \mathbf{4}] \cup [\mathbf{8}, +\infty)$ y el 8 no es interior. La c) no es correcta ya que A es cerrado al ser su complementario que es $(4, +\infty)$ un conjunto abierto
2	Considere el conjunto de números reales A = (1,4) ∩ [2,6]. Diga cuál de los siguientes números reales es interior a A: a) 1 b) 4 c) 3 d) Ninguna de las anteriores
	Solución: El conjunto A se puede poner como A = $[\mathbf{2}, \mathbf{4})$ y el único punto interior es el 3 que es la c)
3	Sea A un conjunto no vacío de números reales y b un punto interior de A. Cuál de las siguientes es verdadera: a) b puede ser el supremo de A b) b puede no ser un punto adherente a A c) b puede ser el mayor número real perteneciente a A d) Existen dos puntos de A, c y d tales que $\frac{c+d}{2} = b$
	Solución: La respuesta es la d) ya que si A es por ejemplo A = (1,4) y b es un punto interior, no puede ser el supremo porque éste es el 4. La b) tampoco porque todo punto interior es adherente. La c) tampoco porque en un intervalo abierto siempre hay puntos de A mayores que él.
4	Consideremos la siguiente sucesión de término general $a_n = \frac{7}{n+7}$. Se verifica: a) Está acotada superiormente por 1 b) No está acotada inferiormente c) Está acotada inferiormente por 1

	d) No está acotada
	Solución: Dándole valores a $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ obtenemos los términos: $1\,; \frac{7}{8}; \frac{7}{9}\,; \frac{7}{10}; \frac{7}{11}$………. y vemos que la sucesión es monótona decreciente. Por otra parte, como su límite es 0, deducimos que está acotada superiormente por 1 e inferiormente por 0. La respuesta es la a) Al margen de esto, como el 1 pertenece al conjunto sería el máximo y como el 0 no pertenece sería el ínfimo
5	Consideramos la siguiente sucesión $\frac{\lvert n-1\rvert}{\lvert n-3\rvert+1}$ $\quad n \geq 0$. Se verifica: a) No está acotada inferiormente b) Está acotada inferiormente por 0 c) Está acotada inferiormente por $\frac{1}{4}$ d) Ninguna de las anteriores
	Solución: Dándole valores a la $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ obtenemos $\frac{1}{4}\ ;\ 0\,; \frac{1}{2}\,; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}, \ldots\ldots$ Como se observa, todos los términos son positivos, por lo tanto, el valor más pequeño que alcanza es el 0 que es una cota inferior. La respuesta es la b)
6	Se considera la sucesión de término general $a_n = \frac{\sqrt{9n^4+3n}}{4n^2}$ $\quad n \in N^*$. Se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ es: a) $+\infty$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{4}$
	Solución: Como el numerador y denominador son del mismo grado ya que $\sqrt{n^4} = n^2$, el límite es el cociente de las expresiones de mayor grado. En el numerador es $\sqrt{9} = 3$ y el denominador es 4, el límite será $\frac{3}{4}$ que es la d)
7	Consideremos la siguiente sucesión $a_n = \frac{-n^2}{-n-4}$ $\quad n \geq 0$. Se verifica: a) No está acotada inferiormente b) Está acotada inferiormente por 4 c) Está acotada superiormente por 100 d) No está acotada superiormente
	Solución: Dándole valores a la n obtenemos la sucesión $0\,; \frac{1}{5}\,; \frac{4}{6}\,; \frac{9}{7}\,; \frac{16}{8}\,; \frac{25}{9} \ldots\ldots\ldots$

	que vemos que es monótona creciente. Por otra parte $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{-n-4} = +\infty$ con lo que la sucesión no está acotada superiormente que es la d)
8	Considere la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ $n \geq 0$. Se verifica: a) No está acotada inferiormente b) Está acotada inferiormente por 1 c) Está acotada superiormente por 1 d) Ninguna de las anteriores
	<u>Solución</u>: Los términos de la sucesión son: $1 \,;\, \frac{\sqrt{2}}{2} \,;\, \frac{\sqrt{3}}{3} \,;\, \frac{\sqrt{4}}{4} \,;\, \frac{\sqrt{5}}{5}$ ... ... que vemos que es decreciente y como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \mathbf{0}$ por ser el exponente del numerador de menor grado que el del denominador, la sucesión está acotada superiormente por 1 que es la c)
9	Considere la sucesión cuyo término general es $a_n = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$ $n > 0$. Se verifica: a) No está acotada inferiormente b) No está acotada superiormente c) Está acotada inferiormente por 1 d) Está acotada superiormente por 1
	<u>Solución</u>: Los términos de la sucesión son: $\frac{1}{\sqrt{2}} \,;\, \frac{2}{\sqrt{5}} \,;\, \frac{3}{\sqrt{10}} \,;\, \frac{4}{\sqrt{17}}$ …….. que vemos que es monótona creciente y como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1$ por ser el exponente del numerador de igual grado que el del denominador, la sucesión está acotada superiormente por 1 que es la d)
10	Si consideramos el conjunto de números reales B = {x ∈ R / $\lvert x-3 \rvert > 3$} La adherencia del conjunto B es igual a: a) R − [0, 6] b) (0, 3) c) R − (0, 6) d) (−3, 3)
	<u>Solución</u>: Sabemos por una propiedad del valor absoluto que el conjunto B es: a) x −3 > 3 de donde x > 6 y b) x −3 < −3 de donde x < 0 La adherencia del apartado a) es $[6, +\infty[$ y la del b) es $]-\infty, 0]$ (se cogen tanto el 6 como el 0) o lo que es lo mismo $R - (0,6)$ que es la c)
11	Si la sucesión de números reales $c_n = \frac{\alpha n^2 + \beta n - 1}{3n+3}$ con α y β ∈R converge a −2, entonces: a) $\alpha = -6$ y β $arbitrario$ b) $\alpha = 0$ y $\beta = -6$

	c) $\alpha = -6 \quad y \quad \beta = 0$ d) Ninguna de las anteriores
	Solución: Como el límite es -2, los polinomios numerador y denominador han de ser del mismo grado (en este caso 1). Esto obliga a que $\alpha = 0 \quad y \quad \beta = -6$ que es la b)
12	Todo conjunto finito de R es: a) Abierto b) Ni cerrado ni abierto c) Cerrado d) Ninguna de ellas
	Solución: Veámoslo con un ejemplo. Sea A = {1, 2}. Su complementario es: $(-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$ que es abierto por ser unión de tres abiertos. Por tanto, su complementario es cerrado que es la c)
13	De las siguientes afirmaciones sobre sucesiones de números reales, señálese cuál de ellas no es cierta. a) Toda sucesión monótona y acotada es convergente b) Una sucesión es de Cauchy, si y solo si es convergente c) Toda sucesión acotada admite una subsucesión convergente d) Una sucesión es convergente si y solo si está acotada
	Solución: Es la d). Por ejemplo, la sucesión: $2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots \ldots \ldots$ Es una sucesión acotada y no es convergente.
15	Si se cumple que $L = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha n-2)^2-(2n+\beta)^2}{2n+1} = -6$ con $\alpha \quad y \quad \beta \in$R , entonces : a) $\alpha = 2 \; y \quad \beta = 5$ b) $\alpha = -2 \quad y \quad \beta = 1$ c) $\alpha = 2 \quad y \quad \beta = -1$ d) Ninguna de las anteriores
	Solución: Como el límite es -6, los polinomios numerador y denominador han de ser del mismo grado (en este caso 1). Veamos: Desarrollando los cuadrados, y agrupando por grado de n, nos queda que: $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha^2-4)n^2 + (-4\alpha - 4\beta)n + 4 - \beta^2}{2n+1}$$ De aquí, para que no sea infinito, $\alpha^2 - 4 = 0$ y $-4\alpha - 4\beta = -12$ y esto se consigue con $\alpha = -2 \quad y \quad \beta = 5$ o con $\alpha = 2 \quad y \quad \beta = 1$ que no es ninguna de ellas. La respuesta correcta, por tanto, es la d)