13 Probabilidad

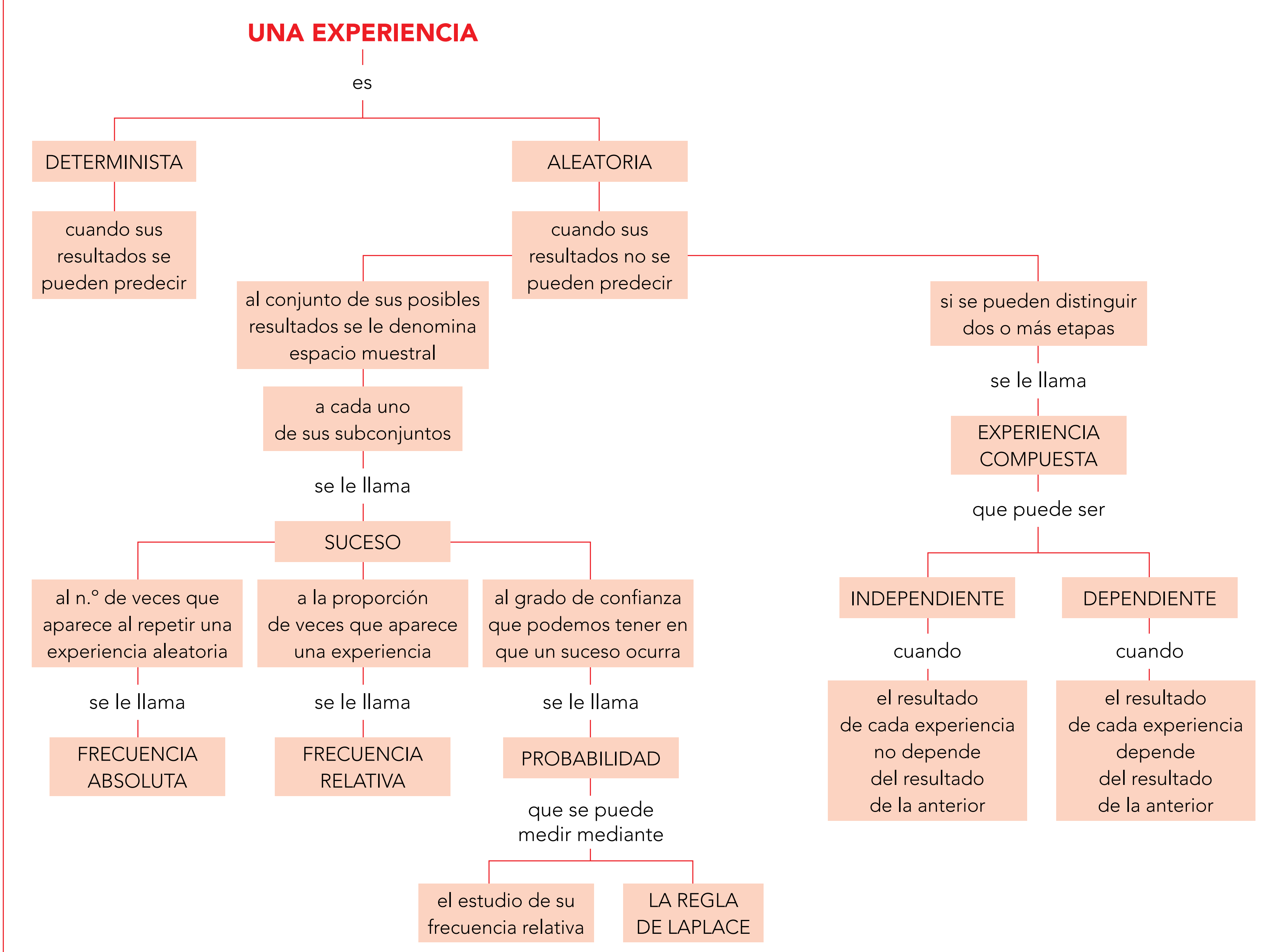
Presentación de la unidad

- Con esta unidad se amplía el estudio del azar y de la probabilidad que los estudiantes han visto en diferentes cursos de la ESO. El alumnado de esta edad tiene la madurez suficiente para saber si una experiencia es aleatoria o no, si es regular o irregular y para valorar la probabilidad de un suceso elemental.
- Es posible, no obstante, que persistan algunos errores preconceptuales, como creer que los resultados obtenidos en un experimento aleatorio influyen en el siguiente. Es difícil asimilar que aun disponiendo de un buen número de resultados previos, no podamos predecir el resultado de la experiencia siguiente.
- Las definiciones de los conceptos básicos (sucesos elementales, tipos de sucesos, relaciones y operaciones entre ellos), se acompañan de ejemplos resueltos y propuestos que ayudan a una mejor comprensión de las mismas. Estos conceptos nos permiten una primera aproximación a la teoría de conjuntos y las leyes de la lógica, pero sin olvidar que lo que se pretende es que los alumnos y las alumnas los manejen con eficacia conceptual sin caer en la formalización y nomenclatura excesivas.
- Con las propiedades de la probabilidad y la ley de Laplace para sucesos equiprobables, se completa el estudio de las cuestiones teóricas, la terminología y las propiedades del azar.
- El cálculo de probabilidades, objeto fundamental de la unidad, comienza con una revisión y profundización de la ley de Laplace. El recuento de casos conviene hacerlo de modo directo, por medio de alguna técnica.
- El tratamiento que damos a las experiencias compuestas consiste en descomponerlas en experiencias simples sobre las que nos planteamos si un resultado influye o no en el siguiente.

Conocimientos mínimos

- Reconocer que los fenómenos de azar están sometidos a regularidades y leyes.

Esquema de la unidad



- Asignar probabilidades a sucesos elementales de experiencias regulares e irregulares.
- Conocer e interpretar la ley de los grandes números.
- Distinguir sucesos seguros, probables e improbables. Distinguir entre sucesos equiprobables y otros que no lo son.
- Aplicar con eficacia la ley de Laplace.
- Reconocer el espacio muestral de una experiencia aleatoria.
- Conocer la diferencia entre sucesos elementales y otros sucesos.
- Reconocer experiencias dependientes e independientes.
- Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas sencillas utilizando un diagrama en árbol.

Complementos importantes

- Conocer y aplicar las relaciones entre sucesos: sucesos incompatibles, sucesos contrarios.
- Realizar operaciones con sucesos.
- Reconocer la compatibilidad o incompatibilidad de dos sucesos.
- Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas más complejas.
- Manejar tablas de contingencia, a partir de las cuales pueden calcularse probabilidades simples y probabilidades condicionadas.

Anticipación de tareas

- Recopilar dados irregulares, chinchetas, tabas… para repetir experiencias un número grande de veces y, así, calcular de manera aproximada probabilidades.

Adaptación curricular

En la parte de "Recursos fotocopiables" se ofrece una adaptación curricular de esta unidad 13 del libro del alumnado, para cuya elaboración se han tenido en cuenta los conocimientos mínimos que aquí se proponen.

La lectura inicial servirá para ejercitar la comprensión lectora y para mostrar los dos aspectos que justifican el estudio de las matemáticas: el práctico y el intelectual.

Los contenidos, si se adaptan a esos mínimos exigibles, o bien no han sufrido cambio alguno o bien se han modificado ligeramente para adecuarlos al posible nivel de a quienes va dirigido.

Si algún contenido supera los mínimos exigibles, o bien se ha suprimido o bien se ha adaptado para ajustarlo a los requisitos exigidos.

Finalmente, los ejercicios y problemas se han reducido en cantidad y se han modificado o bajado de nivel hasta adaptarse a lo convenido.

En la siguiente tabla se recoge una relación de actividades para atender y trabajar el aprendizaje cooperativo, el pensamiento comprensivo, el pensamiento crítico, la interdisciplinariedad, las TIC, el emprendimiento y la resolución de problemas. Unas están propuestas en el libro del alumnado (L.A.), y aquí se hace referencia a ellas indicando la página y la actividad, y otras, como se indica, se sugieren en esta Propuesta Didáctica (P.D.).

Una selección de estas sugerencias están marcadas en el libro del alumnado con un icono; aquí se han marcado con (*).

APRENDIZAJE COOPERATIVO	PENSAMIENTO COMPRENSIVO	PENSAMIENTO CRÍTICO
Pág. 197. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 197. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 199. Actividad 2 (*)
Págs. 199 y 200. Piensa y practica	Pág. 199. Ejercicios resueltos (*)	Pág. 200. Actividad 1 (*)
Pág. 203. Piensa y practica (*)	Pág. 200. Problemas resueltos	Pág. 203. Actividad 1 (*)
Pág. 205. Piensa y practica	Pág. 201. Ejercicio resuelto	Pág. 205. Actividad 3 (*)
Págs. 206, 207 y 208. Actividades 1 a 21 (*)	Págs. 202 y 203. Ejercicios resueltos	Pág. 206. Actividades 4 y 7 (*)
Págs. 208 y 209. Actividades 22 a 30. Actividad sugerida en esta P.D	Pág. 205. Ejercicios resueltos (*)	Pág. 207. Actividad 15 (*)

INTERDISCIPLINARIEDAD	TIC	EMPRENDIMIENTO	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Pág. 194 Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 194 Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 197. Actividad 1 (*)	Todos los problemas propuestos en el libro del alumnado están encuadrados en este apartado. Aquí se señalan algunos que tienen especial interés.
		Pág. 200. Actividad 3. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Págs. 208 y 229. Actividades 22 a 30 (*)
		Págs. 202 y 203. Actividad sugerida en esta P.D. (*)	Pág. 209. Curiosidades matemáticas (*)
		Págs. 206, 207 y 208. Actividades 5, 12 y 22 (*)	

13 Probabilidad

Comienzo en los juegos de azar

Al principio, la teoría de la probabilidad estuvo estrechamente relacionada con los juegos y las apuestas.

Los primeros estudios matemáticos relativos a juegos de azar se deben a algebristas italianos del siglo XVI. Uno de ellos, **Cardano,** contumaz jugador, escribió el primer tratado medianamente organizado sobre este tema: *El libro de los juegos de azar*.

Pascal y Fermat

En 1654, el matemático francés **Blaise Pascal** realizó un viaje en compañía de su amigo el caballero De Meré, un jugador habitual. Este le propuso una serie de problemas de azar que interesaron vivamente al matemático. Unos días después, Pascal se los expuso a su amigo **Pierre Fermat,** también matemático, y ambos los resolvieron, aunque por caminos distintos.

La correspondencia que se estableció entre ellos intercambiando ideas y nuevos problemas dio lugar al nacimiento de la teoría de la probabilidad.

Jerónimo Cardano (1501-1576).

"Niños jugando a los dados" de Murillo.

Desarrollo como ciencia

A partir de entonces, otros matemáticos profundizaron en este nuevo campo. Los más destacados fueron el suizo **Jacob Bernoulli** (*Ars Conjectandi*, 1713) y el francés **Laplace** (*Teoría analítica de las probabilidades*, 1812).

A mediados del siglo XIX el naturalista austriaco, **Gregor Mendel,** aplicó la probabilidad en el estudio de la herencia.

1 Obtención de probabilidades: ¿experimentación o cálculo matemático?

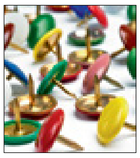
Experiencias regulares e irregulares

■ **Experiencias regulares**

Hay experiencias aleatorias diseñadas de manera que las probabilidades de los sucesos de que constan son previsibles.

Por ejemplo, al lanzar una moneda podemos considerar que es igual de probable que salga una cara o la otra. Por tanto, a cada una le asignamos la probabilidad de 1/2. Lo mismo ocurre con la extracción de una carta de una baraja: todas son igualmente probables y, por tanto, la probabilidad de cada una de ellas es 1/40.

■ **Experiencias irregulares**



En otras experiencias es imposible prever el valor de las probabilidades de los sucesos. Solo se pueden conocer, aproximadamente, experimentando.

Por ejemplo, al lanzar una chincheta y comprobar si cae con la punta hacia arriba o ladeada, no podemos saber, *a priori*[(1)], cómo de probables son cada uno de los dos sucesos. Conseguiremos tener una idea haciéndolo muchas veces y anotando los resultados.

Esta forma de proceder también es válida aunque la experiencia sea regular: la experimentación servirá para evaluar aproximadamente el valor de la probabilidad si no somos capaces de conseguirla mediante cálculos combinatorios. Veamos un ejemplo histórico.

(1) *a priori*: antes de empezar.

Un problema del caballero De Meré

Uno de los problemas que el caballero De Meré propuso a su amigo Pascal es el siguiente:

Al lanzar cuatro dados, ¿qué es más ventajoso, apostar a que salga algún 6 o a que no salga ningún 6?

Él tenía la costumbre de anotar todas sus jugadas y así basarse en la experiencia para apuestas posteriores. De este modo había llegado a la conclusión de que es más probable "algún 6" que "ningún 6".

Pascal y Fermat construyeron una teoría basándose en la cual se obtiene que:

$$P[\text{ningún } 6] = \frac{625}{1\,296} \qquad P[\text{algún } 6] = \frac{671}{1\,296}$$

El jugador, experimentalmente, llegó a una conclusión correcta, pero con inseguridad. Su amigo le respondió con seguridad y precisión gracias a su enfoque matemático.

En las siguientes páginas vamos a recorrer un camino teórico que nos permitirá enfocar y resolver con precisión algunos problemas de probabilidad.

Al iniciar la unidad

- Es interesante ver cómo las especulaciones empíricas surgidas de la práctica del juego dan lugar a toda una ciencia bien fundamentada. El azar, lo aleatorio, que es sinónimo de imprevisible, caótico, se doma y encauza de modo que sirve de base para realizar sólidas previsiones.

Interdisciplinariedad

Se sugiere la siguiente actividad:

Buscar y poner en común, en gran grupo, ejemplos de la utilidad de la probabilidad en distintas actividades y en otros campos de la ciencia: predicciones, toma de decisiones, teoría de juegos, etc.

TIC

Se sugiere la siguiente actividad:

Buscar, y poner en común, información en Internet sobre los matemáticos que aparecen en la lectura, destacando su papel en el desarrollo de la teoría de las probabilidades.

ANOTACIONES

Sugerencias

- Con esta introducción se pretende poner de manifiesto dos formas de evaluar probabilidades de sucesos que los estudiantes manejan, inconscientemente, en sus experiencias cotidianas:

  — Varios sucesos son equiprobables (dado, moneda, baraja, ruleta…). Por tanto, ocurrirán por término medio la misma proporción de veces (al extraer una carta de una baraja, saldrá OROS una de cada cuatro veces por término medio. La probabilidad de OROS es, por tanto, 1/4).

  — La experiencia (observación prolongada más o menos sistemática) nos proporciona una razonable expectativa sobre la probabilidad de un suceso (el autobús se retrasa mucho una vez cada cinco días. Por tanto, la probabilidad de que se retrase el autobús es aproximadamente 1/5).

  Estas intuiciones se perfilan y afianzan con el contenido de esta página.

ANOTACIONES

2 Sucesos aleatorios

Etimología

Aleatorio: Relativo al azar.

En latín, *alea* significa *dado* y también *suerte, azar.*

En nuestras vivencias de cada día nos encontramos con muchos acontecimientos de los que no podríamos predecir si ocurrirán o no. Dependen del azar. Por ejemplo:

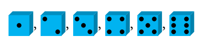
DEPENDEN DEL AZAR	NO DEPENDEN DEL AZAR
Lloverá mañana.	Amanecerá mañana.
Ganará mi equipo de liga.	Se jugará la liga.
Al lanzar la moneda, saldrá cara.	Al lanzar la moneda, caerá.
Me tocará el gordo de Navidad.	Tocará el gordo a algún número.

Se llaman **sucesos aleatorios** aquellos acontecimientos en cuya realización influye el azar.

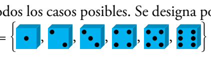
Experiencias aleatorias

Para estudiar el azar y sus propiedades, podemos realizar experiencias aleatorias, es decir, experimentos cuyos resultados dependen del azar. Por ejemplo, estudiemos la experiencia aleatoria consistente en lanzar un dado y observar lo que sale.

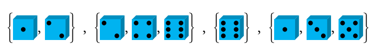
- **Caso** es cada uno de los resultados que puede obtenerse al realizar una experiencia aleatoria.

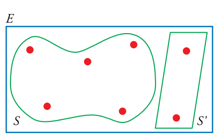
  Los posibles casos al *lanzar un dado* son: 

- **Espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles. Se designa por E.

  En el dado, el espacio muestral es: $E =$ 

- **Sucesos** son los subconjuntos del espacio muestral. Algunos sucesos (hay muchos más) de la experiencia *lanzar un dado* son:





— S' es el suceso contrario de S.
— S' ocurre siempre y cuando no ocurra S.

- Se llama **experiencia aleatoria** a aquella cuyo resultado depende del azar.
- Cada posible resultado de una experiencia aleatoria se llama **caso.**
- **Espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles.
- Los **sucesos** son subconjuntos extraídos del espacio muestral.
- Los casos también son sucesos. Se llaman **sucesos elementales** o **individuales.**
- El espacio muestral, E, se llama suceso total o **suceso seguro.**
- Se llama **suceso imposible,** $\varnothing$, al que no tiene ningún caso.
- Se llama suceso contrario de S a su complementario; es decir, aquel cuyos casos le faltan a S para completar el suceso seguro. Se designa por S'.

Ejercicio resuelto

En los experimentos aleatorios siguientes, determinar su espacio muestral y poner algunos ejemplos de sucesos:

a) Lanzar dos monedas y contar el número de caras.

b) Extraer una carta de una baraja española y anotar lo que sale.

c) Tomar, al azar, la ficha de uno de los socios de una biblioteca y analizar sus datos.

a) El espacio muestral es: $E = \{$0 CARAS, 1 CARA, 2 CARAS$\}$

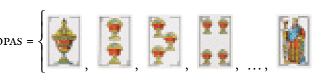
Un suceso: ALGUNA CARA = $\{$1 CARA, 2 CARAS$\}$

Otro suceso: MENOS DE DOS CARAS = $\{$0 CARAS, 1 CARA$\}$

b) El espacio muestral consta de 40 casos: cada una de las cartas de la baraja.

Algunos sucesos:

AS = 

COPAS = 

c) El espacio muestral consta de tantos casos como socios haya en la biblioteca.

Algunos sucesos:

SOCIOS QUE HAN SACADO MÁS DE DIEZ LIBROS ESTE AÑO.

SOCIOS MENORES DE QUINCE AÑOS.

SOCIOS CON MÁS DE DIEZ AÑOS DE ANTIGÜEDAD.

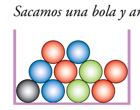
En la web

Ejercicios de iniciación: sucesos aleatorios.

Piensa y practica

1. En una urna hay 10 bolas de cuatro colores.

Sacamos una bola y anotamos su color.



a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

2. Tenemos caramelos de fresa, naranja, limón y piña.

Cogemos uno sin mirar y comprobamos su sabor.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa dos sucesos que tengan más de un caso.

3. En una urna hay 10 bolas numeradas.

Sacamos una bola y anotamos el número.

a) ¿Es una experiencia aleatoria?

b) Escribe el espacio muestral.

c) Inventa cinco sucesos.

4. Daniel le ha regalado a su hermana María una caja de bombones de chocolate.

Saca un bombón y ve si es de chocolate.

¿Es una experiencia aleatoria?

¿Por qué?

Sugerencias

- Que el resultado obtenido al lanzar un dado es una experiencia aleatoria parece indudable: no podemos preverlo, depende del azar. Podríamos decir que, conociendo con toda exactitud su posición inicial, los movimientos que damos al cubilete, la fuerza con que se lanza, el valor de la gravedad en ese lugar, la resistencia del aire, las características de la mesa sobre la que se arroja…, se podría calcular físicamente la cara que va a salir. Demasiada precisión en demasiados detalles. Cualquier ínfima desviación en los cálculos provocaría que el resultado fuera distinto. En definitiva, es imposible de prever: depende del azar.
- Del mismo modo se pueden analizar otras experiencias menos triviales: en el próximo fin de semana, ¿cuántos coches circularán por tal carretera en la mañana del sábado? La presencia o no de un cierto coche depende de la voluntad del conductor y de una serie de circunstancias (profesionales, familiares…). Un estudio profundo de esas circunstancias podría llevarnos a la conclusión de que pasará (o no pasará) ese día, a esa hora, por esa carretera. Tal análisis habría que realizarlo con cada uno de los posibles conductores… ¡Tremendo!
- Sin embargo, tratar el fenómeno global como aleatorio (comparando con otras semanas y atendiendo a aspectos más generales: climatología, acontecimientos, ofertas en televisión…) permite llegar a conclusiones suficientemente precisas como para poder tomar medidas en cuanto al tráfico.
- El profesorado verá en qué circunstancias y para qué estudiantes puede ser pertinente realizar reflexiones como las anteriores. La propuesta que se realiza en estas dos páginas es fácil: reconocer experiencias aleatorias, discutir el espacio muestral, identificar sucesos…

Aprendizaje cooperativo

Las actividades del "Piensa y practica" de la página 197, y todas aquellas en las que se pretende reforzar los conocimientos recién adquiridos, pueden realizarse solidariamente, en pequeño grupo, estimulando el aprendizaje entre iguales. Una vez acordadas las soluciones, cualquier miembro del grupo debe ser capaz de describir y justificar el proceso y la solución.

Pensamiento comprensivo

Tanto el ejercicio resuelto de la página 197 como los de las páginas siguientes, los alumnos y las alumnas pueden intentar resolverlos inicialmente "con lo que ya saben", detectando las dificultades y los bloqueos. Después, analizarán los procesos que se ofrecen en el texto, poniendo en común sus conclusiones y resolviendo las dudas que les surjan.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 18. Ejercicios 3, 4 y 5 de la pág. 19.

  Ampliación: Ejercicios 6, 7 y 8 de la pág. 20.
- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Ampliación: Ejercicio 2 de Practica, ficha A. Ejercicio 1 de Practica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) Sí.

b) E = {negro, rojo, azul, verde} c) Respuesta libre.

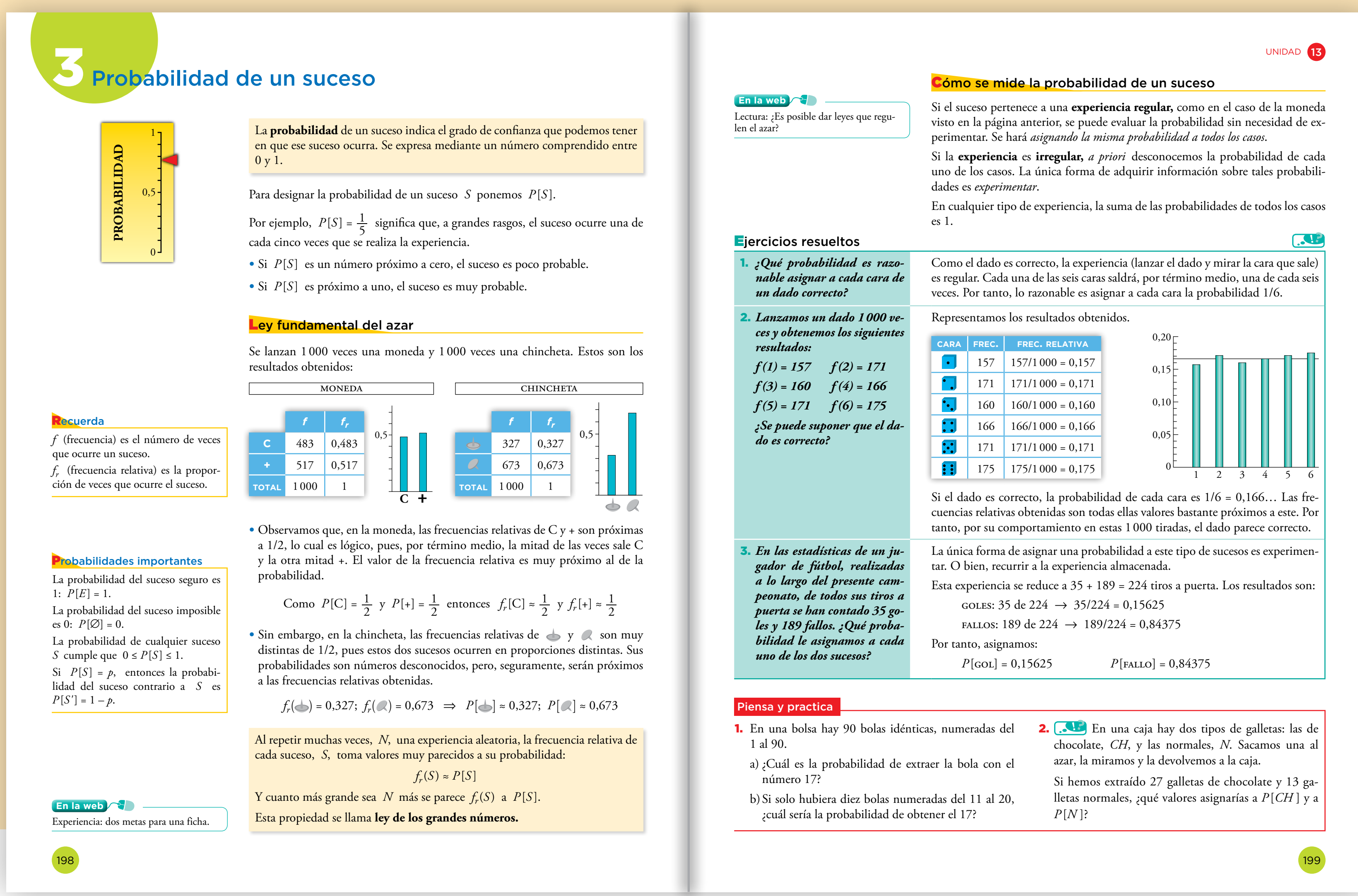
2 a) Sí.

b) E = {fresa, naranja, limón, piña} c) Respuesta libre.

3 a) Sí.

b) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} c) Respuesta libre.

4 No, porque todos los bombones son de chocolate.



3 Probabilidad de un suceso

PROBABILIDAD 1 0,5 0

La **probabilidad** de un suceso indica el grado de confianza que podemos tener en que ese suceso ocurra. Se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Para designar la probabilidad de un suceso S ponemos $P[S]$.

Por ejemplo, $P[S] = \frac{1}{5}$ significa que, a grandes rasgos, el suceso ocurre una de cada cinco veces que se realiza la experiencia.

- Si $P[S]$ es un número próximo a cero, el suceso es poco probable.
- Si $P[S]$ es próximo a uno, el suceso es muy probable.

Ley fundamental del azar

Se lanzan 1 000 veces una moneda y 1 000 veces una chincheta. Estos son los resultados obtenidos:

MONEDA

	f	f_r
C	483	0,483
+	517	0,517
TOTAL	1 000	1

CHINCHETA

	f	f_r
	327	0,327
	673	0,673
TOTAL	1 000	1

- Observamos que, en la moneda, las frecuencias relativas de C y + son próximas a 1/2, lo cual es lógico, pues, por término medio, la mitad de las veces sale C y la otra mitad +. El valor de la frecuencia relativa es muy próximo al de la probabilidad.

$$\text{Como } P[C] = \frac{1}{2} \text{ y } P[+] = \frac{1}{2} \text{ entonces } f_r[C] \approx \frac{1}{2} \text{ y } f_r[+] \approx \frac{1}{2}$$

- Sin embargo, en la chincheta, las frecuencias relativas de y son muy distintas de 1/2, pues estos dos sucesos ocurren en proporciones distintas. Sus probabilidades son números desconocidos, pero, seguramente, serán próximos a las frecuencias relativas obtenidas.

$$f_r(\;) = 0{,}327;\ f_r(\;) = 0{,}673 \Rightarrow P[\;] \approx 0{,}327;\ P[\;] \approx 0{,}673$$

Al repetir muchas veces, N, una experiencia aleatoria, la frecuencia relativa de cada suceso, S, toma valores muy parecidos a su probabilidad:

$$f_r(S) \approx P[S]$$

Y cuanto más grande sea N más se parece $f_r(S)$ a $P[S]$.

Esta propiedad se llama **ley de los grandes números.**

Recuerda

f (frecuencia) es el número de veces que ocurre un suceso.

f_r (frecuencia relativa) es la proporción de veces que ocurre el suceso.

Probabilidades importantes

La probabilidad del suceso seguro es 1: $P[E] = 1$.

La probabilidad del suceso imposible es 0: $P[\varnothing] = 0$.

La probabilidad de cualquier suceso S cumple que $0 \le P[S] \le 1$.

Si $P[S] = p$, entonces la probabilidad del suceso contrario a S es $P[S'] = 1 - p$.

En la web

Experiencia: dos metas para una ficha.

En la web

Lectura: ¿Es posible dar leyes que regulen el azar?

Cómo se mide la probabilidad de un suceso

Si el suceso pertenece a una **experiencia regular,** como en el caso de la moneda visto en la página anterior, se puede evaluar la probabilidad sin necesidad de experimentar. Se hará *asignando la misma probabilidad a todos los casos.*

Si la **experiencia** es **irregular,** *a priori* desconocemos la probabilidad de cada uno de los casos. La única forma de adquirir información sobre tales probabilidades es *experimentar.*

En cualquier tipo de experiencia, la suma de las probabilidades de todos los casos es 1.

Ejercicios resueltos

1. ***¿Qué probabilidad es razonable asignar a cada cara de un dado correcto?***

Como el dado es correcto, la experiencia (lanzar el dado y mirar la cara que sale) es regular. Cada una de las seis caras saldrá, por término medio, una de cada seis veces. Por tanto, lo razonable es asignar a cada cara la probabilidad 1/6.

2. ***Lanzamos un dado 1 000 veces y obtenemos los siguientes resultados:***

$f(1) = 157$ $f(2) = 171$

$f(3) = 160$ $f(4) = 166$

$f(5) = 171$ $f(6) = 175$

¿Se puede suponer que el dado es correcto?

Representamos los resultados obtenidos.

CARA	FREC.	FREC. RELATIVA
⚀	157	157/1 000 = 0,157
⚁	171	171/1 000 = 0,171
⚂	160	160/1 000 = 0,160
⚃	166	166/1 000 = 0,166
⚄	171	171/1 000 = 0,171
⚅	175	175/1 000 = 0,175

Si el dado es correcto, la probabilidad de cada cara es 1/6 = 0,166… Las frecuencias relativas obtenidas son todas ellas valores bastante próximos a este. Por tanto, por su comportamiento en estas 1 000 tiradas, el dado parece correcto.

3. ***En las estadísticas de un jugador de fútbol, realizadas a lo largo del presente campeonato, de todos sus tiros a puerta se han contado 35 goles y 189 fallos. ¿Qué probabilidad le asignamos a cada uno de los dos sucesos?***

La única forma de asignar una probabilidad a este tipo de sucesos es experimentar. O bien, recurrir a la experiencia almacenada.

Esta experiencia se reduce a 35 + 189 = 224 tiros a puerta. Los resultados son:

GOLES: 35 de 224 → 35/224 = 0,15625

FALLOS: 189 de 224 → 189/224 = 0,84375

Por tanto, asignamos:

$P[\text{GOL}] = 0{,}15625$ $P[\text{FALLO}] = 0{,}84375$

Piensa y practica

1. En una bolsa hay 90 bolas idénticas, numeradas del 1 al 90.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer la bola con el número 17?

b) Si solo hubiera diez bolas numeradas del 11 al 20, ¿cuál sería la probabilidad de obtener el 17?

2. En una caja hay dos tipos de galletas: las de chocolate, CH, y las normales, N. Sacamos una al azar, la miramos y la devolvemos a la caja.

Si hemos extraído 27 galletas de chocolate y 13 galletas normales, ¿qué valores asignarías a $P[CH]$ y a $P[N]$?

Sugerencias

- Cuando hablamos de "un dado correcto", nos estamos poniendo en una situación ideal, no real. Ningún dado real es absolutamente correcto. Por tanto, las probabilidades de sus caras no son exactamente 1/6. Solo aproximadamente. La única forma de averiguar su grado de corrección es experimentar mucho con él.

  Sin embargo, es posible que para los alumnos y las alumnas de este nivel tales reflexiones resulten poco apropiadas. De modo que seguiremos distinguiendo instrumentos aleatorios regulares (monedas, dados, barajas de cartas, bolsas llenas de bolas idénticas…) de instrumentos irregulares (chinchetas, "dados chapuceros", barajas incompletas…).

- En estas páginas se completa el proceso seguido en las dos anteriores, y se utiliza la ley de los grandes números para estimar la probabilidad de sucesos para los que la ley de Laplace no es aplicable.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 21.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 1 de Practica, ficha A.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $\frac{1}{90}$ b) $\frac{1}{10}$

2 $P[CH] = \frac{27}{40}$ y $P[N] = \frac{13}{40}$

ANOTACIONES

4 Ley de Laplace para experiencias regulares

Ten en cuenta

$P[\text{1, 2, 3}] = P[1] + P[2] + P[3] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$

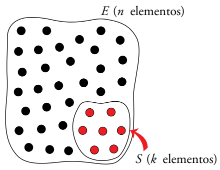
Hemos pintado las caras de un dado de los colores siguientes:

de rojo. El rojo saldrá 3 veces de cada 6: $P[\text{rojo}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

de verde. El verde saldrá 2 veces de cada 6: $P[\text{verde}] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

de amarillo. El amarillo saldrá 1 vez de cada 6: $P[\text{amarillo}] = \frac{1}{6}$

Estos resultados se pueden generalizar para evaluar la probabilidad de un suceso cualquiera relacionado con un instrumento aleatorio regular.



Realizamos una experiencia aleatoria con un instrumento regular.

El espacio muestral tiene n elementos (casos) y, por tanto, la probabilidad de cada caso es $1/n$.

S es un suceso que consta de k elementos.

Entonces, la probabilidad de S es: $P[S] = \frac{k}{n}$

Esto se expresa del modo siguiente:

$$P[S] = \frac{\text{número de casos favorables a } S}{\text{número total de casos posibles}} \quad \boxed{\text{LEY DE LAPLACE}}$$

Problemas resueltos

ROJAS	40
VERDES	25
AZULES	15
NEGRAS	10

1. ***En una bolsa tenemos 90 bolas de colores, todas del mismo tamaño, repartidas como indica la tabla del margen. Si sacamos una al azar, calcular las probabilidades de que sea de uno u otro color.***

$P[\text{roja}] = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$; $P[\text{verde}] = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$; $P[\text{azul}] = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$; $P[\text{negra}] = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

2. ***En una caja hay 3 586 clavos, de los cuales 311 son defectuosos. Calcular la probabilidad de que, al extraer un clavo:***

a) Sea defectuoso. b) Sea correcto.

a) $P[\text{DEFECTUOSO}] = \frac{\text{número de clavos defectuosos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{311}{3586} = 0{,}0867$

b) Hay 3 586 – 311 = 3 275 clavos correctos.

$P[\text{CORRECTO}] = \frac{\text{número de clavos correctos}}{\text{número total de clavos}} = \frac{3275}{3586} = 0{,}9133$

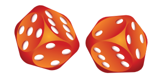
En la web Ejercicios de iniciación: ley de Laplace.

En la web Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace.

Piensa y practica

1. Extraemos una carta de una baraja española con 40 naipes. Halla la probabilidad de obtener:
   a) El as de espadas.
   b) El rey de bastos.
   c) Una figura (sota, caballo o rey).
   d) Una copa.
2. En un campamento hay 32 jóvenes europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar a su portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?
3. Al hacer girar la aguja, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?

5 Experiencias compuestas. Diagramas en árbol



El lanzamiento de dos dados puede considerarse una *experiencia compuesta* de dos experiencias simples: lanzar un dado y lanzar otro dado.

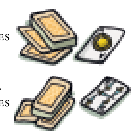
Las experiencias simples que forman una experiencia compuesta pueden ser **dependientes** o **independientes.**

Dos o más experiencias aleatorias son **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás, y son **dependientes** cuando el resultado de cada una influye en las probabilidades de las siguientes.

Por ejemplo, el lanzamiento de dos dados puede considerarse como composición de dos pruebas *independientes*, pues el resultado de cada uno no influye en el otro. Sin embargo, la extracción de dos cartas de una baraja (una carta seguida de otra) es la composición de dos pruebas *dependientes*, pues el resultado de la primera influye en las probabilidades de los sucesos de la segunda.

La 1.ª es AS. Quedan 3 ASES en 39 cartas.

La 1.ª no es AS. Quedan 4 ASES en 39 cartas.

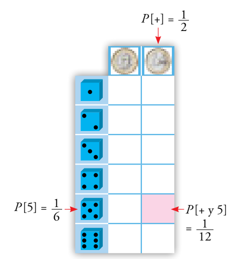


1.ª extracción	quedan	2.ª extracción
AS	39 cartas, 3 ASES	$P[\text{AS}] = 3/39$
NO AS	39 cartas, 4 ASES	$P[\text{AS}] = 4/39$

Composición de experiencias independientes

Es más sencillo calcular las probabilidades de los sucesos compuestos descomponiéndolos en sucesos simples.

Cuando varias experiencias aleatorias son independientes, la probabilidad de que ocurra A en la primera y B en la segunda es: $P[A \text{ y } B] = P[A] \cdot P[B]$.

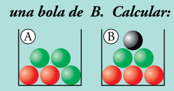


Por ejemplo, si lanzamos una moneda y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener cruz (+) en la moneda y 5 en el dado? Esta es una experiencia compuesta de otras dos ("lanzar una moneda" y "lanzar un dado"). La probabilidad pedida es el producto de las probabilidades, pues cada resultado de la moneda puede darse con cada resultado del dado:

$$P[+ \text{ y } 5] = P[+] \cdot P[5] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Ejercicio resuelto

1. ***Sacamos una bola de A y una bola de B. Calcular:***



a) P[● y ●] b) P[● y ●] c) P[● y ●] d) P[una de ellas ● y otra ●] e) P[la segunda ●]

a) $P[\text{roja y roja}] = P[1.^a\ \text{roja}] \cdot P[2.^a\ \text{roja}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

b) $P[\text{roja y verde}] = P[1.^a\ \text{roja}] \cdot P[2.^a\ \text{verde}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

c) $P[\text{verde y roja}] = P[1.^a\ \text{verde}] \cdot P[2.^a\ \text{roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

d) $P[\text{una de ellas roja y otra verde}] = P[\text{roja y verde}] + P[\text{verde y roja}] = \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{13}{30}$

e) $P[\text{la } 2.^a\ \text{negra}] = P[\text{cualquier cosa la } 1.^a] \cdot P[\text{la } 2.^a\ \text{negra}] = 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

En la web Cálculo de probabilidades en experiencias independientes.

Sugerencias

- Si la experiencia es "regular" y el espacio muestral está perfectamente determinado, la probabilidad de cada caso es, obviamente, $1/n$ (siendo n el número total de casos). Por tanto, si un suceso tiene k casos, su probabilidad es k/n. Esto es la ley de Laplace.

Emprendimiento

Se sugiere la siguiente actividad:

Comprobar manipulativamente los resultados de la actividad 3 del "Piensa y practica". Para ello, se puede construir una ruleta sobre un corcho con una chincheta como eje y una horquilla como flecha.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicios 3, 4, 5 y 6 de la pág. 22.

  Ampliación: Ejercicios 7, 8, 9 y 10 de la pág. 23.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Refuerzo: Ejercicio 3 de Practica, ficha A.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 a) $\frac{1}{40}$ b) $\frac{1}{40}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{1}{4}$

2 $\frac{32}{83}$

3 $\frac{3}{7}$

Sugerencias

- El cálculo de probabilidades se empieza a complicar con las experiencias compuestas, por lo que resulta conveniente descomponerlas en experiencias simples como se muestra en este apartado.
- Se aprende a distinguir las experiencias independientes de las dependientes.
- Antes de dar paso a calcular probabilidades, merece la pena que los estudiantes aporten ejemplos de experiencias independientes:

  — Lanzamientos de dados y monedas.

  — Extracción de dos bolas de una urna, o de dos cartas de una baraja, devolviendo la 1.ª bola a la urna o la 1.ª carta al montón.

  De este modo, asociarán experimentos que se hagan "con reemplazamiento" con la independencia.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

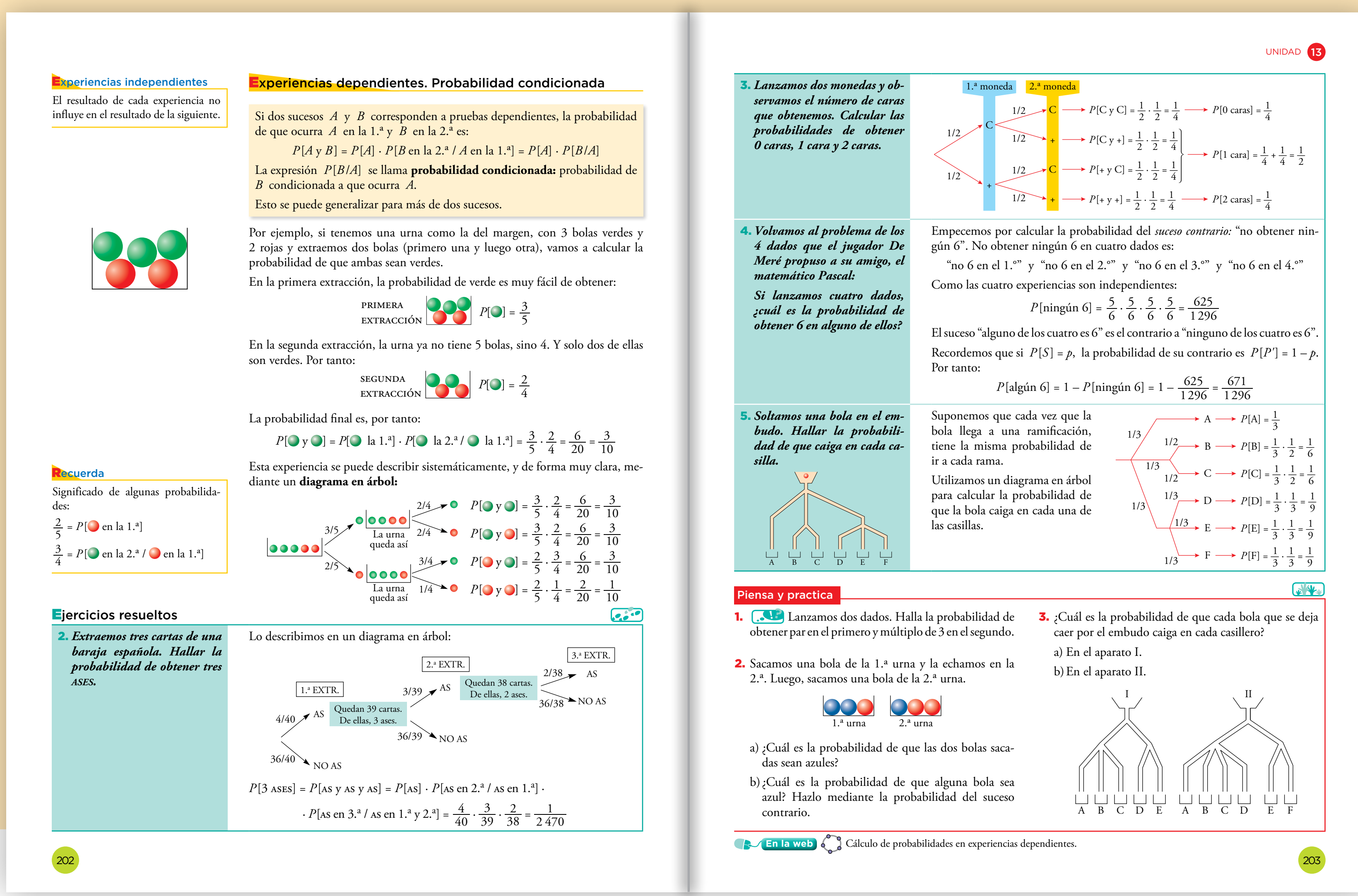
  Refuerzo: Ejercicios 1 y 2 de la pág. 24.

  Ampliación: Ejercicios 3, 4, 5, 6 y 7 de la pág. 25.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Ampliación: Ejercicio 2 de Practica, ficha B. Ejercicios 1, 2, 3 y 4 de Aplica, ficha B.

ANOTACIONES



Experiencias independientes

El resultado de cada experiencia no influye en el resultado de la siguiente.

Experiencias dependientes. Probabilidad condicionada

Si dos sucesos A y B corresponden a pruebas dependientes, la probabilidad de que ocurra A en la 1.ª y B en la 2.ª es:

$$P[A \text{ y } B] = P[A] \cdot P[B \text{ en la 2.ª} / A \text{ en la 1.ª}] = P[A] \cdot P[B/A]$$

La expresión $P[B/A]$ se llama **probabilidad condicionada:** probabilidad de B condicionada a que ocurra A.

Esto se puede generalizar para más de dos sucesos.

Por ejemplo, si tenemos una urna como la del margen, con 3 bolas verdes y 2 rojas y extraemos dos bolas (primero una y luego otra), vamos a calcular la probabilidad de que ambas sean verdes.

En la primera extracción, la probabilidad de verde es muy fácil de obtener:

PRIMERA EXTRACCIÓN $P[●] = \frac{3}{5}$

En la segunda extracción, la urna ya no tiene 5 bolas, sino 4. Y solo dos de ellas son verdes. Por tanto:

SEGUNDA EXTRACCIÓN $P[●] = \frac{2}{4}$

La probabilidad final es, por tanto:

$$P[● \text{ y } ●] = P[● \text{ la 1.ª}] \cdot P[● \text{ la 2.ª} / ● \text{ la 1.ª}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Esta experiencia se puede describir sistemáticamente, y de forma muy clara, mediante un **diagrama en árbol:**

3/5 — La urna queda así — 2/4: $P[● \text{ y } ●] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
2/4: $P[● \text{ y } ●] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
2/5 — La urna queda así — 3/4: $P[● \text{ y } ●] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
1/4: $P[● \text{ y } ●] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Recuerda

Significado de algunas probabilidades:

$\frac{2}{5} = P[● \text{ en la 1.ª}]$

$\frac{3}{4} = P[● \text{ en la 2.ª} / ● \text{ en la 1.ª}]$

Ejercicios resueltos

2. ***Extraemos tres cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de obtener tres ASES.***

Lo describimos en un diagrama en árbol:

1.ª EXTR. 4/40 AS — Quedan 39 cartas. De ellas, 3 ases. — 2.ª EXTR. 3/39 AS — Quedan 38 cartas. De ellas, 2 ases. — 3.ª EXTR. 2/38 AS; 36/38 NO AS
36/39 NO AS
36/40 NO AS

$$P[3 \text{ ASES}] = P[\text{AS y AS y AS}] = P[\text{AS}] \cdot P[\text{AS en 2.ª} / \text{AS en 1.ª}] \cdot$$
$$\cdot P[\text{AS en 3.ª} / \text{AS en 1.ª y 2.ª}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2\,470}$$

202

UNIDAD 13

3. ***Lanzamos dos monedas y observamos el número de caras que obtenemos. Calcular las probabilidades de obtener 0 caras, 1 cara y 2 caras.***

1.ª moneda — 2.ª moneda

$P[\text{C y C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow P[0 \text{ caras}] = \frac{1}{4}$

$P[\text{C y +}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P[\text{+ y C}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\rightarrow P[1 \text{ cara}] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P[\text{+ y +}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow P[2 \text{ caras}] = \frac{1}{4}$

4. ***Volvamos al problema de los 4 dados que el jugador De Meré propuso a su amigo, el matemático Pascal:***

Si lanzamos cuatro dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 6 en alguno de ellos?

Empecemos por calcular la probabilidad del *suceso contrario:* "no obtener ningún 6". No obtener ningún 6 en cuatro dados es:

"no 6 en el 1.º" y "no 6 en el 2.º" y "no 6 en el 3.º" y "no 6 en el 4.º"

Como las cuatro experiencias son independientes:

$$P[\text{ningún } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1\,296}$$

El suceso "alguno de los cuatro es 6" es el contrario a "ninguno de los cuatro es 6".

Recordemos que si $P[S] = p$, la probabilidad de su contrario es $P[P'] = 1 - p$. Por tanto:

$$P[\text{algún } 6] = 1 - P[\text{ningún } 6] = 1 - \frac{625}{1\,296} = \frac{671}{1\,296}$$

5. ***Soltamos una bola en el embudo. Hallar la probabilidad de que caiga en cada casilla.***

A B C D E F

Suponemos que cada vez que la bola llega a una ramificación, tiene la misma probabilidad de ir a cada rama.

Utilizamos un diagrama en árbol para calcular la probabilidad de que la bola caiga en cada una de las casillas.

$A \rightarrow P[A] = \frac{1}{3}$

$B \rightarrow P[B] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$C \rightarrow P[C] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$D \rightarrow P[D] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$E \rightarrow P[E] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$F \rightarrow P[F] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Piensa y practica

1. Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de obtener par en el primero y múltiplo de 3 en el segundo.

2. Sacamos una bola de la 1.ª urna y la echamos en la 2.ª. Luego, sacamos una bola de la 2.ª urna.

1.ª urna — 2.ª urna

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas sacadas sean azules?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna bola sea azul? Hazlo mediante la probabilidad del suceso contrario.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que cada bola que se deja caer por el embudo caiga en cada casillero?

a) En el aparato I.

b) En el aparato II.

I: A B C D E — II: A B C D E F

En la web: Cálculo de probabilidades en experiencias dependientes.

203

Sugerencias

- De nuevo es muy positivo que se pongan ejemplos de extracciones de bolas o naipes y se concluya que cuando la extracción es "sin reemplazamiento", se está trabajando con experiencias dependientes.
- Se introduce aquí la probabilidad condicionada, un concepto importante que se tratará con más profundidad en cursos posteriores. El diagrama en árbol permite visualizar el proceso y, por tanto, lo facilita. Es muy interesante interpretar el significado de cada probabilidad que se maneja en el diagrama y describirla utilizando la nomenclatura adecuada.

Emprendimiento

Se sugiere la siguiente actividad:

Comprobar manipulativamente los resultados de las experiencias que se proponen en los ejercicios resueltos 2, 3 y 4. Si el docente lo cree adecuado, la experiencia del ejercicio resuelto 2 puede simplificarse usando solo parte de las cartas.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.º 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicio 1 de la pág. 26. Ejercicios 2, 3 y 4 de la pág. 27.

  Ampliación: Ejercicio 5 de la pág. 27. Ejercicios 1 y 2 de la pág. 28. Ejercicios 3, 4 y 5 de la pág. 29.

- Del fotocopiable INCLUSIÓN Y ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

  Ampliación: Ejercicios 1, 2, 3 y 4 de Aplica, ficha A. Ejercicio 3 de Practica, ficha B.

Soluciones de "Piensa y practica"

1 $\frac{1}{6}$

2 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}$

3 a) $P[A] = P[B] = P[C] = \frac{1}{6}$

$P[D] = P[E] = \frac{1}{4}$

b) $P[A] = P[B] = P[C] = P[D] = \frac{1}{8}$

$P[E] = P[F] = \frac{1}{4}$

ANOTACIONES

6 Tablas de contingencia

TIPO DE ACTIVIDAD EXTRAESCOLAR

CURSO	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.°	12	36	72	120
2.°	15	40	45	100
3.°	21	44	35	100
4.°	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

En un centro docente hay 400 estudiantes de la ESO (120 de 1.°, 100 de 2.°, 100 de 3.° y 80 de 4.°). Cada uno de ellos puede participar en una actividad extraescolar (solo en una o en ninguna). Hay actividades extraescolares de dos tipos: culturales y deportivas.

En la tabla adjunta se describe el reparto de estudiantes según su curso y según el tipo de actividad en la que participan.

Es una **tabla de contingencia,** porque describe un colectivo de individuos (los estudiantes de un centro) repartidos por dos conceptos (curso y actividad extraescolar). En cada concepto hay varias clases (4 cursos, 3 actividades). Cada individuo está contabilizado en alguna casilla y solo en una.

Interpretar una tabla

Observa la tabla que tienes arriba y responde:

a) ¿Cuántos estudiantes del centro participan en actividades culturales? ¿Cuántos de ellos son de 2.°?

b) ¿Cuántos estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar? De ellos, ¿cuántos son de 4.°?

c) ¿Cuántos estudiantes de 3.° participan en actividades deportivas?

d) ¿Cuántos estudiantes que participan en actividades deportivas son de 3.°?

Proporciones y probabilidades

En la tabla anterior podemos calcular multitud de proporciones. Por ejemplo:

a) ¿Qué proporción del total son estudiantes de 1.°?

Hay 120 de un total de 400. Por tanto, 120/400 = 0,30. Son el 30 %.

b) ¿Qué proporción de estudiantes de 1.° participan en actividades culturales?

12 de un total de 120 estudiantes de 1.°: 12/120 = 0,10. El 10 %.

¿Cómo interpretamos estas proporciones como probabilidades? Veamos:

a) Tomamos al azar un estudiante. ¿Qué probabilidad hay de que sea de 1.°?

P[1.°] = 120/400 = 0,30

b) Tomamos al azar un estudiante de 1.°. ¿Qué probabilidad hay de que participe en una actividad cultural?

P[CULTURAL / 1.°] = 12/120 = 0,10

¿Cómo designamos a los 44 estudiantes que se encuentran en la intersección de la fila **3.°** y la columna **DEPORTIVA**? Son los estudiantes de 3.° que participan en una actividad deportiva. Podríamos calcular la probabilidad de que al elegir, al azar, un estudiante del centro, sea de 3.° y que participe en una actividad deportiva:

P[3.° y DEPORTIVA] = P[3.° ∩ DEPORTIVA] = 44/400 = 0,11

En la web HOJA DE CÁLCULO con la que podrás trabajar con tablas de contingencia.

Probabilidades condicionadas

	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.°	12	36	72	120
2.°	15	40	45	100
3.°	21	44	35	100
4.°	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

Una de las probabilidades obtenidas arriba, P[CULTURAL / 1.°], es una **probabilidad condicionada.** El colectivo de referencia no es el total de estudiantes del centro, sino solo los de 1.°.

Análogamente, P[3.° / CULTURAL] significa que el colectivo de referencia es el conjunto de estudiantes que participan en alguna actividad cultural y nos preguntamos por la probabilidad de que, al elegir uno de ellos al azar, sea de 3.°.

204

UNIDAD 13

Ejercicios resueltos

1. ***Explicar el significado de los números que se resaltan en la tabla.***

	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.°	12	36	**72**	120
2.°	15	**40**	45	100
3.°	**21**	44	35	100
4.°	24	40	16	**80**
TOTAL	72	**160**	168	**400**

- 400 es el total de estudiantes del centro.
- 80 es el número de estudiantes de 4.°.
- 160 es el número de estudiantes que participan en alguna actividad deportiva.
- 21 es el número de estudiantes de 3.° que participan en alguna actividad cultural, es decir, "**3.° y CULTURAL**" (o bien "**3.° ∩ CULTURAL**").
- 40 estudiantes de 2.° que participan en alguna actividad deportiva.
- 72 estudiantes de 1.° que no participan en NINGUNA actividad extraescolar.

2. ***Explicar lo que significa cada una de las siguientes expresiones y dar su valor:***

P [3.°]

P [NINGUNA]

P [2.° / NINGUNA]

P [NINGUNA / 2.°]

P[3.°]: proporción de estudiantes del centro que son de 3. °. Es decir, la probabilidad de que, al tomar un estudiante del centro al azar, sea de 3.°.

P[3.°] = 100/400 = 1/4 = 0,25

P[NINGUNA]: proporción de estudiantes que no practican ninguna actividad.

P[NINGUNA] = 168/400 = 0,42

P[2.° / NINGUNA]: entre los estudiantes que no practican NINGUNA actividad extraescolar, qué proporción son de 2.°.

P[2.° / NINGUNA] = 45/168 = 0,27

P[NINGUNA / 2.°]: entre los estudiantes de 2.°, qué proporción no practica NINGUNA actividad extraescolar.

P[NINGUNA / 2.°] = 45/100 = 0,45

3. ***Para analizar la evolución de la participación en actividades CULTURALES al avanzar la edad, ¿qué proporciones hemos de calcular y comparar?***

Hemos de comparar P[CULT./1.°], P[CULT./2.°], P[CULT./3.°], P[CULT./4.°].

P[CULT. / 1.°] = 12/120 = 0,10
P[CULT. / 2.°] = 15/100 = 0,15
P[CULT. / 3.°] = 21/100 = 0,21
P[CULT. / 4.°] = 24/80 = 0,30

La participación en actividades culturales evoluciona, de 1.° a 4.°, así:

10 % → 15 % → 21 % → 30 %

Es claro que aumenta con la edad.

En la web Refuerza el trabajo con tablas de contingencia.

Piensa y practica

1. Explica el significado de los números 120, 168, 12, 45 y 40 de la tabla del ejercicio resuelto anterior.

2. Explica lo que significa, para la tabla del ejercicio resuelto anterior, estas expresiones y da su valor:

a) P[1.°] b) P[CULTURAL]

c) P[4.° / CULTURAL] d) P[CULTURAL / 4.°]

3. Queremos analizar, partiendo de los datos de la tabla del ejercicio resuelto anterior, la evolución del absentismo (falta de participación) en actividades extraescolares cualesquiera, al aumentar la edad. Calcula las proporciones que convenga y compáralas.

4. En una bolsa hay 40 bolas huecas, y dentro de cada una hay un papel en el que pone SÍ o NO, según esta tabla:

	🔴	🟢	🔵	TOTAL
SÍ	15	4	1	20
NO	5	4	11	20
TOTAL	20	8	12	40

a) Describe los sucesos SÍ, NO, 🔴, 🔴 / SÍ, SÍ / 🔴 y calcula sus probabilidades.

b) Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya SÍ en su interior? ¿Y si la bola es azul?

c) Se ha sacado una bola y dentro pone SÍ. ¿Cuál es la probabilidad de que sea 🔴? ¿Y 🟢? ¿Y 🔵?

En la web Cálculo de probabilidades en tablas de contingencia.

205

Sugerencias

- Esta forma de clasificar los elementos de un conjunto permite poner en práctica, además de la destreza en interpretar una tabla, la revisión de una serie de conceptos ligados a sucesos y a sus probabilidades, así como a la nomenclatura adecuada: unión e intersección de sucesos, probabilidad condicionada, suceso contrario… Por ello, el manejo de tablas de contingencia resulta sumamente formativo.

Refuerzo y ampliación

Se recomiendan:

- Del cuaderno n.° 5 de EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS:

  Refuerzo: Ejercicio 5 de la pág. 31.

Soluciones de "Interpretar una tabla"

a) El 18 % de los estudiantes del centro participan en actividades culturales. De ellos, el 20,85 % son de 2.°.

b) El 42 % de los estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar. De ellos, el 9,5 % son de 4.°.

c) El 44 %

d) El 27,5 %

Soluciones de "Piensa y practica"

1 120 → Número de estudiantes de 1.°.

168 → Número de estudiantes con ninguna actividad extraescolar.

12 → Número de estudiantes de 1.° con actividad extraescolar CULTURAL.

45 → Número de estudiantes de 2.° con ninguna actividad extraescolar.

40 → Número de estudiantes de 4.° con actividad extraescolar DEPORTIVA.

2 a) $P[1.°] = \frac{120}{400} = 0{,}3$ (probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea de 1.°).

b) $P[\text{CULTURAL}] = \frac{72}{400} = 0{,}18$ (probabilidad de elegir a un estudiante con actividad extraescolar CULTURAL).

c) $P[4.°/\text{CULTURAL}] = \frac{24}{72} = 0{,}375$ (probabilidad de que, habiendo elegido a un estudiante con actividad CULTURAL, este resulte ser de 4.°).

d) $P[\text{CULTURAL}/4.°] = \frac{24}{80} = 0{,}3$ (probabilidad de elegir a un estudiante con actividad extraescolar CULTURAL entre todos los de 4.°).

3 $P[\text{NINGUNA}/1.°] = 0{,}6$ $P[\text{NINGUNA}/2.°] = 0{,}45$

$P[\text{NINGUNA}/3.°] = 0{,}35$ $P[\text{NINGUNA}/4.°] = 0{,}2$

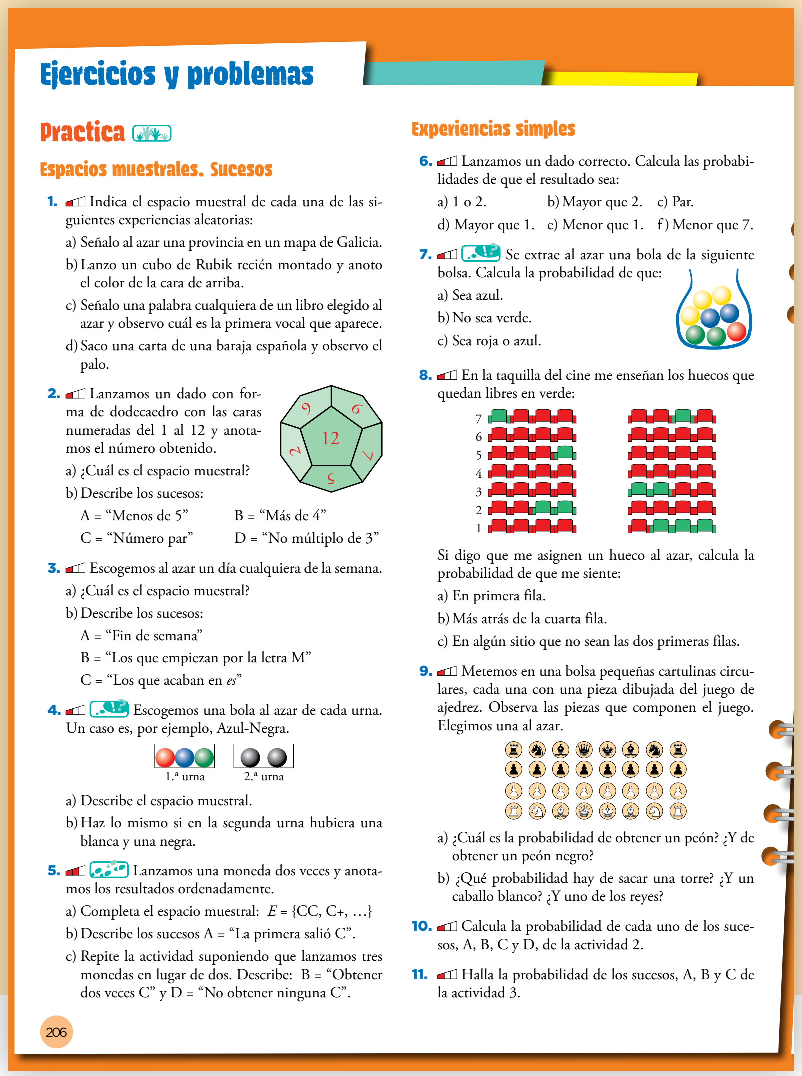
Según pasan los cursos, cada vez hay menos estudiantes que no hacen ninguna actividad extraescolar.

4 a) $P[\text{SÍ}] = \frac{1}{2}$; $P[\text{NO}] = \frac{1}{2}$; P[🔴] $= \frac{1}{2}$; P[🔴/SÍ] $= \frac{3}{4}$; P[SÍ/🔴] $= \frac{3}{4}$

b) P[SÍ/🔴] $= \frac{3}{4}$; P[SÍ/🔵] $= \frac{1}{12}$

c) P[🔴/SÍ] $= \frac{3}{4}$; P[🟢/SÍ] $= \frac{1}{5}$; P[🔵/SÍ] $= \frac{1}{20}$

ANOTACIONES



Ejercicios y problemas

Practica

Espacios muestrales. Sucesos

1. Indica el espacio muestral de cada una de las siguientes experiencias aleatorias:

a) Señalo al azar una provincia en un mapa de Galicia.

b) Lanzo un cubo de Rubik recién montado y anoto el color de la cara de arriba.

c) Señalo una palabra cualquiera de un libro elegido al azar y observo cuál es la primera vocal que aparece.

d) Saco una carta de una baraja española y observo el palo.

2. Lanzamos un dado con forma de dodecaedro con las caras numeradas del 1 al 12 y anotamos el número obtenido.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Menos de 5" B = "Más de 4"

C = "Número par" D = "No múltiplo de 3"

3. Escogemos al azar un día cualquiera de la semana.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

A = "Fin de semana"

B = "Los que empiezan por la letra M"

C = "Los que acaban en *es*"

4. Escogemos una bola al azar de cada urna. Un caso es, por ejemplo, Azul-Negra.

1.ª urna 2.ª urna

a) Describe el espacio muestral.

b) Haz lo mismo si en la segunda urna hubiera una blanca y una negra.

5. Lanzamos una moneda dos veces y anotamos los resultados ordenadamente.

a) Completa el espacio muestral: E = {CC, C+, …}

b) Describe los sucesos A = "La primera salió C".

c) Repite la actividad suponiendo que lanzamos tres monedas en lugar de dos. Describe: B = "Obtener dos veces C" y D = "No obtener ninguna C".

Experiencias simples

6. Lanzamos un dado correcto. Calcula las probabilidades de que el resultado sea:

a) 1 o 2. b) Mayor que 2. c) Par.

d) Mayor que 1. e) Menor que 1. f) Menor que 7.

7. Se extrae al azar una bola de la siguiente bolsa. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea azul.

b) No sea verde.

c) Sea roja o azul.

8. En la taquilla del cine me enseñan los huecos que quedan libres en verde:

7 6 5 4 3 2 1

Si digo que me asignen un hueco al azar, calcula la probabilidad de que me siente:

a) En primera fila.

b) Más atrás de la cuarta fila.

c) En algún sitio que no sean las dos primeras filas.

9. Metemos en una bolsa pequeñas cartulinas circulares, cada una con una pieza dibujada del juego de ajedrez. Observa las piezas que componen el juego. Elegimos una al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un peón? ¿Y de obtener un peón negro?

b) ¿Qué probabilidad hay de sacar una torre? ¿Y un caballo blanco? ¿Y uno de los reyes?

10. Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos, A, B, C y D, de la actividad 2.

11. Halla la probabilidad de los sucesos, A, B y C de la actividad 3.

206

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

1 a) E = {A Coruña, Lugo, Ourense, Pontevedra}

b) E = {azul, amarillo, rojo, verde, blanco, naranja}

c) E = {a, e, i, o, u}

d) E = {oros, copas, espadas, bastos}

2 a) E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) A = {1, 2, 3, 4}

B = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

C = {2, 4, 6, 8, 10, 12}

D = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11}

3 a) E = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

b) A = {sábado, domingo}

B = {martes, miércoles}

C = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}

4 a) {roja-negra, azul-negra, verde-negra}

b) {roja-negra, roja-blanca, azul-negra, azul-blanca, verde-negra, verde-blanca}

5 a) E = {CC, C+, +C, ++}

b) A = {CC, C+}

c) E = {CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++}

B = {CC+, C+C, +CC}

D = {+++}

6 a) $P[1 \text{ o } 2] = \frac{1}{3}$ b) $P[> 2] = \frac{2}{3}$ c) $P[\text{PAR}] = \frac{1}{2}$

d) $P[> 1] = \frac{5}{6}$ e) $P[< 1] = 0$ f) $P[< 7] = 1$

7 a) $P[\text{AZUL}] = \frac{1}{4}$ b) $P[\text{no VERDE}] = \frac{3}{4}$ c) $P[\text{ROJA o AZUL}] = \frac{3}{8}$

8 Hay 10 huecos libres:

a) $P[\text{fila } 1.^a] = \frac{3}{10}$

b) $P[\text{más atrás de la cuarta fila}] = \frac{3}{10}$

c) $P[\text{no en } 1.^a \text{ o } 2.^a] = \frac{1}{2}$

9 a) $P[\text{PEÓN}] = \frac{1}{2}$; $P[\text{PEÓN NEGRO}] = \frac{1}{4}$

b) $P[\text{TORRE}] = \frac{1}{8}$; $P[\text{REY}] = \frac{1}{6}$

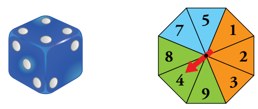
10 $P[A] = \frac{1}{3}$; $P[B] = \frac{2}{3}$; $P[C] = \frac{1}{2}$; $P[D] = \frac{2}{3}$

11 $P[A] = \frac{2}{7}$; $P[B] = \frac{2}{7}$; $P[C] = \frac{5}{7}$

ANOTACIONES

Experiencias compuestas independientes

12. Tiramos un dado y hacemos girar la ruleta:



a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos números sean pares? ¿Y de que alguno de los dos sea impar?

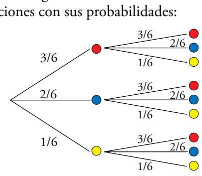
b) Halla la probabilidad de obtener un número mayor que 2 en el dado y un color que no sea azul en la ruleta.

c) Calcula la probabilidad de obtener un 6 o un 5 en el dado.

d) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados sea mayor que 10.

13. Tiramos dos dados iguales. Cada uno tiene tres caras rojas, dos azules y una amarilla.

El siguiente diagrama en árbol muestra las posibles combinaciones con sus probabilidades:



Calcula, a partir del diagrama en árbol, la probabilidad de obtener:

a) Dos caras rojas.

b) Una cara amarilla y una roja.

c) Dos caras iguales.

d) Dos caras distintas.

14. Tiramos tres monedas.

a) Construye un diagrama en árbol con las posibles combinaciones.

b) Calcula la probabilidad de obtener dos caras y una cruz.

c) ¿Qué probabilidad hay de obtener alguna cruz?

Experiencias compuestas dependientes. Probabilidad condicionada

15. Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de estos sucesos:

a) Un 5 y un rey.

b) Dos espadas.

c) Ninguna copa (no copa y no copa).

d) Dos figuras (sota, caballo o rey).

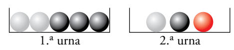
e) Una figura y una no figura.

16. Lanzamos una moneda: si sale cara, tomo una carta de una baraja; si sale cruz, no sigo jugando.

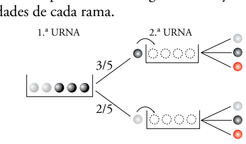
a) ¿Qué probabilidad hay de obtener OROS O FIGURA?

b) ¿Qué probabilidad hay de que ninguna sea ni ORO ni FIGURA?

17. Cogemos al azar una bola de la 1.ª urna, la echamos en la 2.ª y sacamos una bola de esta 2.ª urna.



Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol. Completa la composición de la segunda urna y las probabilidades de cada rama.



Calcula, a partir del diagrama, estas probabilidades:

a) P[1.ª ⚫ y 2.ª ⚫]   b) P[1.ª ⚪ y 2.ª ⚫]

c) P[2.ª ⚫]   d) P[2.ª ⚪]   e) P[2.ª 🔴]

18. Calcula las siguientes probabilidades condicionadas correspondiente a la experiencia de las urnas del ejercicio anterior:

a) P[1.ª ⚫ y 2.ª ⚪]   b) P[2.ª ⚪ y 1.ª ⚪]

c) P[2.ª ⚫ y 1.ª ⚫]   d) P[2.ª ⚪ y 1.ª ⚫]

e) P[2.ª 🔴 y 1.ª ⚫]   f) P[2.ª 🔴 y 1.ª ⚪]

¿Qué ocurre con las dos últimas probabilidades? Explica por qué.

207

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

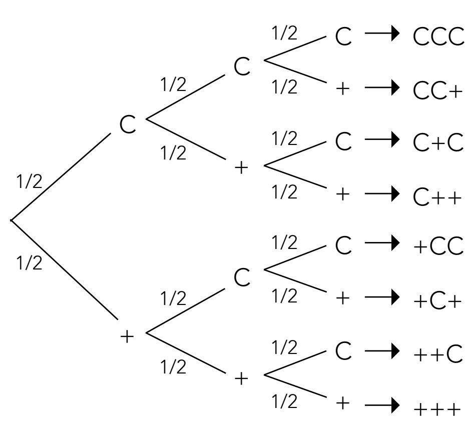
12 a) $P[\text{DOS PARES}] = \dfrac{3}{16}$ b) $P[> 2 \text{ y NO RULETA AZUL}] = \dfrac{1}{2}$

c) $P[6 \text{ o } 5 \text{ EN DADO}] = \dfrac{1}{3}$ d) $P[\text{SUMA} > 10] = \dfrac{13}{48}$

13 a) $P[2 \text{ CARAS ROJAS}] = \dfrac{1}{4}$ b) $P[\text{AMARILLA Y ROJA}] = \dfrac{1}{6}$

c) $P[2 \text{ IGUALES}] = \dfrac{7}{18}$ d) $P[2 \text{ DISTINTOS}] = \dfrac{11}{18}$

14 a)



b) $P[2 \text{ CARAS y } 1 +] = \dfrac{3}{8}$ c) $P[\text{alguna CRUZ}] = \dfrac{7}{8}$

15 a) $P[5 \text{ y REY}] = \dfrac{2}{195}$ b) $P[2 \text{ ESPADAS}] = \dfrac{3}{52}$

c) $P[\text{ninguna COPA}] = \dfrac{29}{52}$ d) $P[2 \text{ FIGURAS}] = \dfrac{11}{130}$

e) $P[\text{FIGURA y no FIGURA}] = \dfrac{14}{65}$

16 a) $P[\text{OROS O FIGURA}] = \dfrac{19}{80}$ b) $P[\text{ni OROS ni FIGURA}] = \dfrac{61}{80}$

17 a) $\dfrac{3}{10}$ b) $\dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{2}{5}$ d) $\dfrac{7}{20}$ e) $\dfrac{1}{4}$

18 Las probabilidades del enunciado son las siguientes:

a) $\dfrac{3}{20}$ b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{3}{10}$

d) $\dfrac{3}{20}$ e) $\dfrac{3}{20}$ f) $\dfrac{1}{10}$

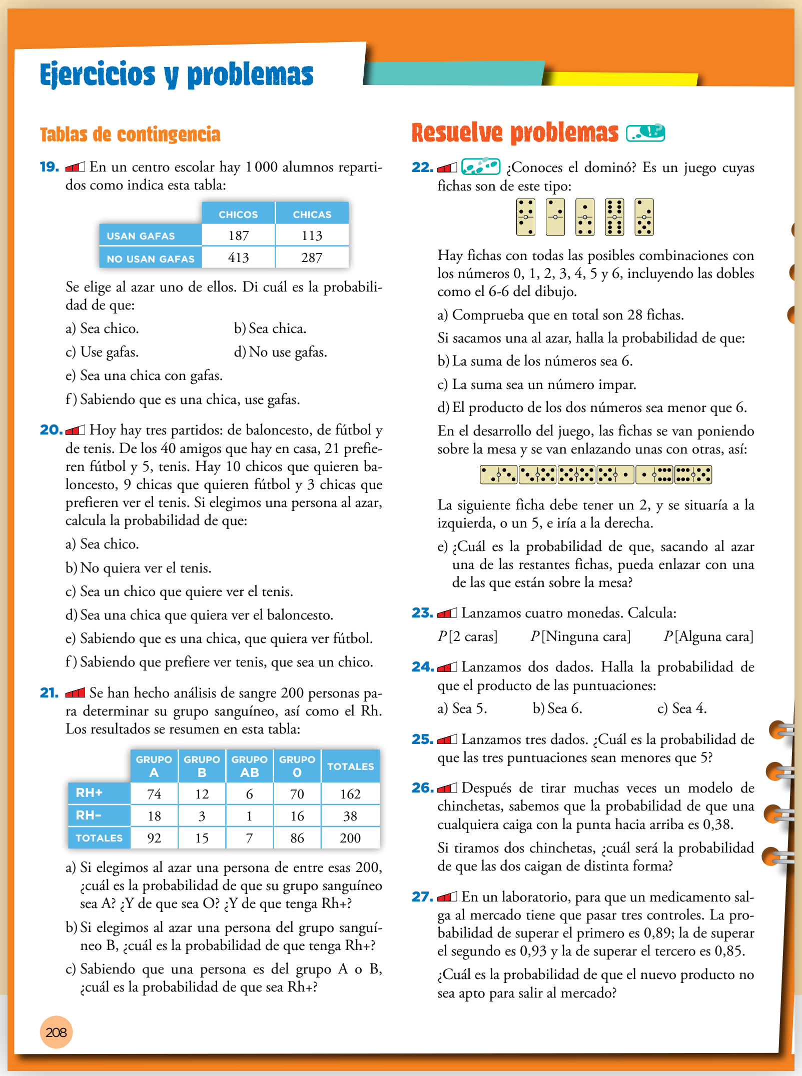
Aplicando la igualdad $P[A \text{ y } B] = P[A] \cdot P[B/A]$, se obtiene:

a) P[1.ª ⚫ / 2.ª ⚪] $= \dfrac{3}{7}$ b) P[2.ª ⚪ / 1.ª ⚪] $= \dfrac{1}{2}$ c) P[2.ª ⚫ / 1.ª ⚫] $= \dfrac{1}{2}$

d) P[2.ª ⚪ / 1.ª ⚫] $= \dfrac{1}{4}$ e) P[2.ª 🔴 / 1.ª ⚫] $= \dfrac{1}{4}$ f) P[2.ª 🔴 / 1.ª ⚪] $= \dfrac{1}{4}$

Las dos últimas probabilidades son iguales porque, como no hay bolas rojas en la primera urna, el número de bolas rojas en la segunda siempre será 1.

ANOTACIONES



Ejercicios y problemas

Tablas de contingencia

19. En un centro escolar hay 1 000 alumnos repartidos como indica esta tabla:

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	187	113
NO USAN GAFAS	413	287

Se elige al azar uno de ellos. Di cuál es la probabilidad de que:

a) Sea chico. b) Sea chica.

c) Use gafas. d) No use gafas.

e) Sea una chica con gafas.

f) Sabiendo que es una chica, use gafas.

20. Hoy hay tres partidos: de baloncesto, de fútbol y de tenis. De los 40 amigos que hay en casa, 21 prefieren fútbol y 5, tenis. Hay 10 chicos que quieren baloncesto, 9 chicas que quieren fútbol y 3 chicas que prefieren ver el tenis. Si elegimos una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chico.

b) No quiera ver el tenis.

c) Sea un chico que quiere ver el tenis.

d) Sea una chica que quiera ver el baloncesto.

e) Sabiendo que es una chica, que quiera ver fútbol.

f) Sabiendo que prefiere ver tenis, que sea un chico.

21. Se han hecho análisis de sangre 200 personas para determinar su grupo sanguíneo, así como el Rh. Los resultados se resumen en esta tabla:

	GRUPO A	GRUPO B	GRUPO AB	GRUPO O	TOTALES
RH+	74	12	6	70	162
RH–	18	3	1	16	38
TOTALES	92	15	7	86	200

a) Si elegimos al azar una persona de entre esas 200, ¿cuál es la probabilidad de que su grupo sanguíneo sea A? ¿Y de que sea O? ¿Y de que tenga Rh+?

b) Si elegimos al azar una persona del grupo sanguíneo B, ¿cuál es la probabilidad de que tenga Rh+?

c) Sabiendo que una persona es del grupo A o B, ¿cuál es la probabilidad de que sea Rh+?

Resuelve problemas

22. ¿Conoces el dominó? Es un juego cuyas fichas son de este tipo:

Hay fichas con todas las posibles combinaciones con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, incluyendo las dobles como el 6-6 del dibujo.

a) Comprueba que en total son 28 fichas.

Si sacamos una al azar, halla la probabilidad de que:

b) La suma de los números sea 6.

c) La suma sea un número impar.

d) El producto de los dos números sea menor que 6.

En el desarrollo del juego, las fichas se van poniendo sobre la mesa y se van enlazando unas con otras, así:

La siguiente ficha debe tener un 2, y se situaría a la izquierda, o un 5, e iría a la derecha.

e) ¿Cuál es la probabilidad de que, sacando al azar una de las restantes fichas, pueda enlazar con una de las que están sobre la mesa?

23. Lanzamos cuatro monedas. Calcula:

P[2 caras] P[Ninguna cara] P[Alguna cara]

24. Lanzamos dos dados. Halla la probabilidad de que el producto de las puntuaciones:

a) Sea 5. b) Sea 6. c) Sea 4.

25. Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

26. Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.

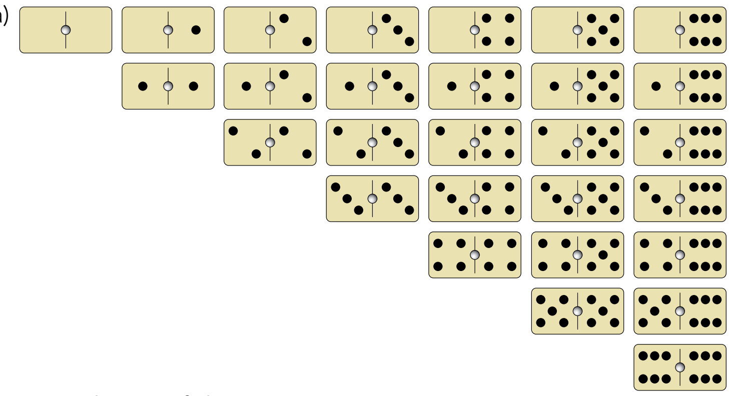
Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?

27. En un laboratorio, para que un medicamento salga al mercado tiene que pasar tres controles. La probabilidad de superar el primero es 0,89; la de superar el segundo es 0,93 y la de superar el tercero es 0,85.

¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo producto no sea apto para salir al mercado?

208

22 a)



En total son 28 fichas.

b) $P[\text{suma } 6] = \frac{1}{7}$ c) $P[\text{suma IMPAR}] = \frac{3}{7}$

d) $P[\text{producto} < 6] = \frac{13}{28}$ e) $P[\text{enlazar}] = \frac{4}{11}$

23 a) $P[\text{2 caras}] = \frac{3}{8}$ b) $P[\text{ninguna cara}] = \frac{1}{16}$

c) $P[\text{alguna cara}] = \frac{15}{16}$

24 a) $P[\text{producto } 5] = \frac{1}{18}$ b) $P[\text{producto } 6] = \frac{1}{9}$

c) $P[\text{producto } 4] = \frac{1}{12}$

25 $\frac{8}{27}$

26 0,47

27 $P[\text{NO APTO}] = 0{,}3$

Aprendizaje cooperativo

Los alumnos y las alumnas, distribuidos en pequeños grupos, deberán resolver tandas de problemas.

Cada miembro del grupo se responsabilizará de la resolución de un problema y de exponer el proceso de resolución al resto, que lo aceptará como bueno o lo corregirá razonando las enmiendas.

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

19 a) $P[\text{CHICO}] = \frac{3}{5}$ b) $P[\text{CHICA}] = \frac{2}{5}$

c) $P[\text{USE GAFAS}] = \frac{3}{10}$ d) $P[\text{no USE GAFAS}] = \frac{7}{10}$

e) $P[\text{CHICA CON GAFAS}] = \frac{113}{1000}$ f) $P[\text{USE GAFAS / CHICA}] = \frac{113}{400}$

20 a) $P[\text{CHICO}] = \frac{3}{5}$ b) $P[\text{no QUIERE TENIS}] = \frac{7}{8}$

c) $P[\text{CHICO QUIERE TENIS}] = \frac{1}{20}$ d) $P[\text{CHICA QUIERE BALONCESTO}] = \frac{1}{10}$

e) $P[\text{FÚTBOL / CHICA}] = \frac{9}{16}$ f) $P[\text{CHICO / QUIERE TENIS}] = \frac{2}{5}$

21 a) $P[A] = \frac{23}{50}$

$P[B] = \frac{43}{100}$

$P[\text{Rh+}] = \frac{81}{100}$

b) $P[\text{Rh+ / B}] = \frac{4}{5}$

c) $P[\text{Rh+ / A o B}] = \frac{86}{107}$

ANOTACIONES

28. Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.

Durante unos días hacemos 1 000 veces la experiencia de *agitar*, *inclinar la botella* y *anotar el color de la bola que se ve*. Al final, hemos obtenido estos resultados:

f(⚫) = 461 f(🔴) = 343 f(🟢) = 196

Vamos a estimar el número n de bolas negras:

f_r(⚫) $= \frac{461}{1000} = 0{,}461$ y P[⚫] $= \frac{n}{20}$

Como f_r(⚫) ≈ P[⚫], hacemos:

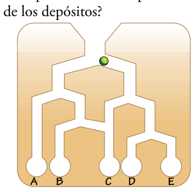
$0{,}461 \approx \frac{n}{20} \to n \approx 20 \cdot 0{,}461 = 9{,}22$

Estimamos que el número de bolas negras es 9. ¿Cuántas bolas de cada color hay en la botella?

29. En un cajón hay 20 calcetines, pero no sabemos de qué colores. Sacamos un calcetín, anotamos el color y lo devolvemos al cajón. Lo hacemos cien veces y obtenemos 42 veces un calcetín negro; 8 veces uno rojo, y 50 veces uno blanco.

Estima cuántos calcetines hay de cada color.

30. ¿Cuál es la probabilidad de que una bola caiga en cada uno de los depósitos?



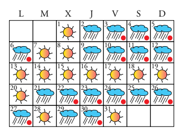
Curiosidades matemáticas

Probabilidad con condiciones

¿Varía la probabilidad de un suceso si se calcula con la condición de que haya ocurrido previamente otro suceso? Analiza los dos ejemplos que siguen.

EJEMPLO 1. Tiempo durante el mes de enero

Se han anotado los días de lluvia durante el mes de enero en cierta localidad (observa que son 18). Se han señalado con un punto rojo los días de lluvia tras otro día de lluvia (son 14). A partir de estos datos nos hacemos dos preguntas:



a) *SIN CONDICIÓN*. Si hoy es un día cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana?

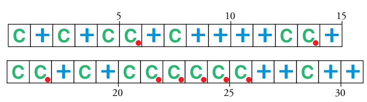
f_r[LLUVIA] = 18/31 = 0,58 ⇒ P[LLUVIA] ≈ 60 %

b) *CON CONDICIÓN*. Si hoy ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que llueva mañana?

f_r[LLUVIA] = 14/18 = 0,78 ⇒ P[LLUVIA] ≈ 80 %

EJEMPLO 2. Lanzamientos de monedas

Se ha lanzado 31 veces una moneda, obteniendo 17 veces el resultado "cara". Además, se ha señalado con un punto rojo cada vez que, después de cara, ha salido otra cara (8 veces). Y nos hacemos dos preguntas:



a) *SIN CONDICIÓN*. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?

f_r[C] = 17/31 = 0,55

La probabilidad es próxima al 50 % esperado.

b) *CON CONDICIÓN*. ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara después de cara?

f_r[C] = 8/17 = 0,47

La probabilidad es próxima al 50 % esperado.

Conclusión: En el primer ejemplo, *la condición* modifica la probabilidad: si hoy llueve, es más probable que llueva mañana. En el segundo ejemplo, lo que salga en una tirada no influye en la probabilidad de la siguiente.

EXPERIMENTA → Realiza tú estas experiencias (con mayor número de datos) y confirma las conclusiones.

209

ANOTACIONES

Soluciones de "Ejercicios y problemas"

28 Hay 4 bolas verdes, 9 negras y 7 rojas.

29 Hay 8 calcetines negros, 2 rojos y 10 blancos.

30 $P[A] = \frac{1}{4}$; $P[B] = \frac{1}{8}$; $P[C] = \frac{3}{8}$; $P[D] = \frac{1}{8}$; $P[E] = \frac{1}{8}$

Curiosidades matemáticas

Los días lluviosos tienden a acumularse. Es decir, si hoy ha llovido, es más probable que mañana llueva.

Esta idea se desarrolla en la experiencia comparando las dos proporciones siguientes:

— Días lluviosos en general.

— Días lluviosos precedidos de día lluvioso.

La segunda es, claramente, mayor que la primera. Sin embargo, al lanzar una moneda, la probabilidad de que salga cara no se ve afectada por lo que salió en la tirada anterior. Es decir, son sensiblemente iguales estas dos proporciones:

— Caras.

— Caras precedidas de cara.

Los estudiantes podrían repetir estas dos experiencias.

La segunda de manera sencilla e inmediata, efectuando una tanda de varios cientos de lanzamientos de moneda, anotándolas secuencialmente y analizándolas como se ha hecho en el libro.

La primera (llueve/no llueve) requiere mucho tiempo de observación (anotar los resultados de, al menos, varias decenas de días) y un posterior análisis.

ANOTACIONES