Forma canónica de Jordan- Esquema teórico

La forma canónica de Jordan es una forma de extender el concepto de diagonalizable a matrices que no lo son, y que permite cierta simplificación en determinadas operaciones.

Definición: Toda matriz cuadrada A sobre un cuerpo K, algebraicamente cerrado, es semejante a una matriz D, diagonal por cajas, denominada **forma canónica de Jordan** asociada a A
Es decir, $D = P^{-1}AP$ con P regular, P se llama también matriz de paso.

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & D_n \end{pmatrix} \; donde \; D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

- Si A es diagonalizable, entonces D es diagonal, y se calcula simplemente poniendo los autovalores tantas veces como su multiplicidad en la diagonal, y la matriz de paso P será la matriz de autovectores como columnas respetando el orden de los autovalores en los autovectores.

- Si A no es diagonalizable, entonces D tiene en la diagonal secundaria tantos 1 como vectores no propios se necesitan en la construcción de una base de E_n

  Notese que $D^m = \begin{pmatrix} D_1^n & & & \\ & D_2^m & & \\ & & \dots & \\ & & & D_n^m \end{pmatrix}$

  Para construir la matriz P, se calculará la secuencia de núcleos:
  $kerf(A - \lambda_i I),\ kerf(A - \lambda_i I)^2,\ kerf(A - \lambda_i I)^3$, ….
  Se analiza el **exponente** en el que se estabiliza la dimensión, a partir de ahí se toma un vector $\overrightarrow{v_1}$ del núcleo de ese subespacio vectorial y se van calculando las imágenes de los vectores

  $$(A - \lambda_i I)\overrightarrow{v_1}, (A - \lambda_i I)^2\overrightarrow{v_1}, (A - \lambda_i I)^3\overrightarrow{v_1}, \dots$$

  Hasta completar la multiplicidad del autovalor, y estos vectores, para todos los autovalores formarán en columnas la matriz P.

La forma canónica de Jordan es útil para calcular las potencias de una matriz, puesto que matrices diagonales o en forma canónica de Jordan son muy sencillas de calcular sus potencias, puesto que si:

$$A = PAP^{-1}$$
$$A^n = PAP^{-1} \cdot PAP^{-1} \cdot \dots \cdot PAP^{-1} = PA^nP^{-1}$$

A continuación, veamos dos ejemplos distintos, uno de una matriz diagonalizable y otro que no lo es.

1.- Dada la matriz de número reales:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Hallar la expresión de A^n, en función de n.

Solución:

Para poder calcular las potencias de una matriz el primer método a utilizar es ver si es diagonalizable calculando el polinomio característico y los autovalores y autovectores para calcular para ver cual es la matriz diagonal asociada a la original, y a partir de ahí, solo hay que calcular potencias de una matriz diagonal que es mucho más sencillo que de cualquier otra matriz.

El polinomio característico viene dado por el determinante $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[(-4-\lambda)(5-\lambda)+18]$$

$$= (5-\lambda)(-20-\lambda+\lambda^2+18) =$$

$$(5-\lambda)(-2-\lambda+\lambda^2) = (5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Por tanto, los 3 **autovalores son** $\mathbf{5, 2}$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{-1}$.

Veamos cuales son los autovectores que corresponden a la base del subespacio vectorial generado por cada uno de los autovalores, así:

$$(A-5I)X = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9x-6y=0 \\ 3x=0 \\ 3x+6y=0 \end{cases}$$ de donde se deduce que $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$

cuyo vector generador es $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$**, que es el primer autovector**.

$$(A-2I)X = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -6x-6y=0 \\ 3x+3y=0 \\ 3x+6y+3z=0 \end{cases}$$ de donde se deduce que

$\begin{cases} x=-y \\ y=y \\ z=-y \end{cases}$ cuyo vector generador es $(\mathbf{-1}, \mathbf{1}, \mathbf{-1})$**, que es el segundo autovector**.

$$(A+I)X = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x-6y=0 \\ 3x+6y=0 \\ 3x+6y+6z=0 \end{cases}$$ de donde se deduce que

$\begin{cases} x=-2y \\ y=y \\ z=0 \end{cases}$ cuyo vector generador es $(\mathbf{-2}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$**, que es el tercer autovector**.

Por tanto, utilizaremos como $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuya inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A^n=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2^n&-2(-1)^n\\0&2^n&(-1)^n\\5^n&-2^n&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2^n+2(-1)^n&-2^{n+1}+2(-1)^n&0\\2^n+(-1)^{n+1}&2^{n+1}+(-1)^{n+1}&0\\5^n-2^n&2\cdot5^n-2^{n+1}&5^n\end{pmatrix}$$

2.- Sea A la matriz compañera del polinomio $p(x)=x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+4\in K[x]$.
Se pide:
a) determina los polinomios característico y mínimo de A;
b) demuestra que existe $P\in GL5(K)$ tal que $A\ =\ P^{-1}JP$, donde $J\in M_5(K)$ es una matriz de Jordan;
c) calcula la matriz J de Jordan y alguna matriz P que satisfagan la relación anterior.

Solución:

Por definición, la matriz compañera de dicho polinomio se entiende una matriz de la siguiente estructura, en la que los coeficientes del polinomio mínimo aparecen en la última columna cambiado de signo:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&-4\\1&0&0&0&-16\\0&1&0&0&-25\\0&0&1&0&-19\\0&0&0&1&-7\end{pmatrix}$$

a) Esta matriz tiene como característica que su polinomio mínimo y característico es su polinomio compañero, así que estos son $p(x)$.

b) Para ver si existe la matriz de Jordan, lo único que tenemos que hacer es ver si descompone el polinomio completamente, así, por Ruffini, vemos que
$$p(x)=(x+1)^3(x+2)^2$$
Y, por lo tanto, sí que existirá la forma canónica de Jordan.

c) Primero veamos si la matriz es diagonalizable, para ello, para cada uno de los dos autovalores tendría que coincidir la dimensión del subespacio vectorial invariante con la multiplicidad del autovalor en el polinomio característico.

- $\lambda=-1$, multiplicidad 3

$$rg(A+I)=rg\begin{pmatrix}1&0&0&0&-4\\1&1&0&0&-16\\0&1&1&0&-25\\0&0&1&1&-19\\0&0&0&1&-6\end{pmatrix}=4\Rightarrow\dim\big(Ker(A+I)\big)=1$$

$$rg(A+I)^2=3\Rightarrow\dim(Ker(A+I)^2)=2$$

$$rg(A+I)^3=2\Rightarrow\dim(Ker(A+I)^3)=3$$

$$rg(A+I)^4=2\Rightarrow\dim(Ker(A+I)^4)=3$$

Vemos que se estabiliza la dimensión del núcleo en la potencia 3, así buscamos un vector que pertenezca a $Ker(A+I)^3$ y que no esté en $Ker(A+I)^2$, y coincide con la multiplicidad del autovalor.

$$(A+I)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 16 & -48 \\ 3 & 1 & -16 & 60 & -176 \\ 3 & 3 & -24 & 84 & -240 \\ 1 & 3 & -16 & 52 & -144 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & -32 \end{pmatrix}$$

$$Ker(A+I)^3 = \begin{pmatrix} 48 & -16 & 4 \\ 32 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ker(A+I)^2 = \begin{pmatrix} -20 & 4 \\ -36 & 8 \\ -17 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ve que el tercer vector del $Ker(A+I)^3$ no está en $Ker(A+I)^2$ puesto que tiene las dos últimas coordenadas como 0. Así, tomamos

$$\overrightarrow{u_1} = (4,4,1,0,0)$$

Para calcular los otros dos vectores simplemente calculamos la imagen de ese primer vector por $(A+I)$ sucesivamente.

$$\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 13 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -2$ de multiplicidad 2
  Para ello calculemos $A + 2I$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad y\, rg(A+2I) = 4$$

$$rg(A+2I)^2 = 3 \Rightarrow \dim(Ker(A+2I)^2) = 2$$

$$rg(A+2I)^3 = 3 \Rightarrow \dim(Ker(A+2I)^2) = 2$$

Por tanto, se estabiliza en la segunda potencia, y tomaremos un vector del núcleo de $Ker(A+2I)^2$ que no esté en $Ker(A+2I)$.

$$\ker(A+2I)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -8 & 3 \\ -6 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ker(A+2I) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomemos pues las imágenes de esos vectores por la aplicación lineal que tiene la matriz $A+2I$

$$\overrightarrow{v_2} = (A+2I)\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la forma canónica de Jordan de la matriz será:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Y la matriz de paso serán los vectores puestos en columnas siguiendo el orden de los autovalores:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 13 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & -6 \\ 3 & -5 & 8 & -12 & 17 \\ -1 & 2 & -4 & 8 & -16 \\ -3 & 5 & -8 & 12 & -16 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar de forma sencilla que si se cumple que:

$$PJP^{-1} = A$$