

Soluciones de los problemas propuestos

1. Al extraer una carta de una baraja de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea

- a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura.

Solución:

a) Entre las 40 cartas hay 4 reyes $\Rightarrow P(\text{Rey}) = 4/40$.

b) $P(\text{Rey de copas}) = 1/40$.

c) Las figuras de la baraja son 12: 4 sotas, 4 caballos y 4 reyes. Las 28 cartas restantes no son figuras. Por tanto,

$$P(\text{No figura}) = 28/40.$$

2. Si se consideran familias con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que una de esas familias, elegida al azar, tenga al menos una niña?

Solución:

El espacio muestral tiene 8 sucesos elementales:

$\{HHH, HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM\}$, siendo H = hombre y M = mujer.

La probabilidad de que los tres hijos serán varones es: $P(HHH) = \frac{1}{8}$.

Como tener al menos una niña es el suceso contrario de que los tres sean varones, se tendrá:

$$P(\text{al menos una niña}) = 1 - P(HHH) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado (con las caras numeradas del 1 al 6) se obtenga:

- a) Al menos un as: $\{1\}$. b) Dos ases. c) Dos números distintos

Solución:

Espacio muestral:

$E = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\} \rightarrow 36$ sucesos elementales.

a) Los sucesos favorables son 11: $\{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$.

$$\text{Luego, } P(\text{al menos un as}) = \frac{11}{36}.$$

b) $P(2 \text{ ases}) = \frac{1}{36} \rightarrow$ es el suceso $(1, 1)$.

c) Es el suceso contrario de “dos números iguales” $= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

$$P(\text{dos números distintos}) = 1 - P(\text{dos números iguales}) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

4. Calcula la probabilidad $P(A \cup B)$ sabiendo que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ y $P(A/B) = 0,2$.

Solución:

$$\text{Como } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1.$$

Por otra parte, de:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,1 = 0,7.$$

5. En un IES, los alumnos se clasifican según su sexo y práctica de la natación, según muestra la siguiente tabla:

	Nadador	No nadador	TOTAL
Hombre	189	301	490
Mujer	165	335	500
TOTAL	354	636	990

A la vista de estos datos, calcula la probabilidad de que elegido un alumno/a al azar:

- Sea no nadador.
- Sea mujer y no nadadora.
- Sea nadadora sabiendo que es mujer.
- Sea hombre si el alumno elegido no practica natación.

Solución:

Por la regla de Laplace, y atendiendo a los datos dados en la tabla:

a) $P(\text{"no nadador"}) = 636/990$.

b) $P(\text{"mujer y no nadadora"}) = 335/990$.

c) $P(\text{"nadadora"/"ser mujer"}) = \frac{\text{ser mujer nadadora}}{\text{ser mujer}} = \frac{165}{500}$.

d) $P(\text{"hombre"/"no nadador"}) = \frac{\text{hombre no nadador}}{\text{no nadador}} = \frac{301}{636}$.

6. Se lanzan dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que:

- Uno a de los resultados sea par y el otro impar.
- Uno de los resultados sea par sabiendo que la suma de los dos es 7.
- Uno de los resultados sea 4 sabiendo que la suma de los dos es mayor que 7.

Solución:

El espacio muestral es el indicado en el problema 3. También puede verse la tabla adjunta.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) $P(\text{par e impar}) = P(1^\circ \text{ dado par y } 2^\circ \text{ impar}) + P(1^\circ \text{ impar y } 2^\circ \text{ par}) =$
 $= \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

b) $P(\text{par/suma 7}) = 1$, ya que para sumar 7 un dado debe ser de puntuación par.

Los sucesos de suma 7 son: (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1). En todos hay un resultado par.

c) Hay 15 sucesos en los que la suma es mayor que 7: (2, 6); (3, 5) y (3, 6); (4, 4), (4, 5) y (4, 6); (5, 3), (5, 4), (5, 5) y (5, 6); (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) y (6, 6). En 5 de estos casos ha salido un 4. Por tanto:

$$P(\text{de 4 si la suma es mayor que 7}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

7. De una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 negras se hacen dos extracciones sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de sacar:

- Dos bolas blancas
- Sólo una negra
- Del mismo color

Halla las mismas probabilidades si las extracciones se hicieran con reemplazamiento.

Solución:

Sin reemplazamiento:

$$a) P(BB) = P(1^{\circ} B) \cdot P(2^{\circ} B / 1^{\circ} B) = \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{5}{17}.$$

$$b) P(NB, BN) = 2 \cdot P(NB) = 2 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} = \frac{80}{153}.$$

c) Son del mismo color cuando no hay una banca y una negra (caso anterior); por tanto:

$$P(\text{del mismo color}) = 1 - \frac{80}{153} = \frac{73}{153}.$$

Con reemplazamiento:

$$a) P(BB) = \frac{10}{18} \cdot \frac{10}{18} = \frac{25}{81}.$$

$$b) P(NB, BN) = 2 \cdot P(NB) = 2 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{18} = \frac{40}{81}.$$

$$c) P(\text{del mismo color}) = 1 - \frac{40}{81} = \frac{41}{81}.$$

8. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades: $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,7$.

a) ¿Son los sucesos A y B incompatibles? Razona la respuesta.

b) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.

Solución:

a) Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

Como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

En este caso:

$$P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ no son incompatibles.}$$

b) Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Como

$$P(A \cap B) = 0,2 \text{ y } P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \Rightarrow \text{los sucesos son independientes.}$$

9. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0,9$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(\bar{A}) = 0,4$, donde $\bar{A}$ es el suceso contrario de A . Calcula las siguientes probabilidades:

$$P(B), \quad P(A/B), \quad P(A \cap \bar{B}), \quad P(\bar{A} \cap B), \quad P(\overline{A \cap B}).$$

Solución:

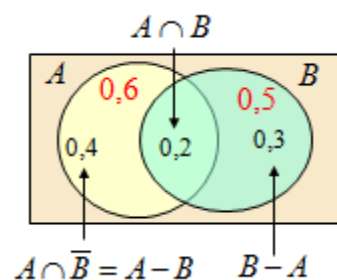
$$\text{Si } P(\bar{A}) = 0,4 \Rightarrow P(A) = 0,6.$$

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos:

$$\bullet \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow (\text{teniendo en cuenta los datos})$$

$$0,9 = 0,6 + P(B) - 0,2 \Rightarrow P(B) = 0,5.$$

- $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$.
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4$.
- $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,2 = 0,8$.
- $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$.



10. El 42 % de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que el 24 % de las mujeres y el 16 % de los hombres están en el paro. Halla la probabilidad de que una persona, elegida al azar:

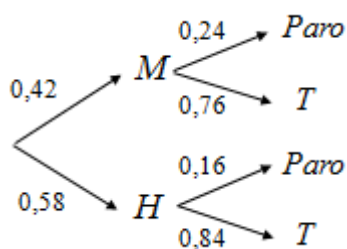
- Esté en el paro y sea hombre.
- Esté en paro.
- Sea hombre si está en paro.

Solución:

Para la población activa considerada, sean los sucesos:

M : mujer; H : hombre; $Paro$: estar en paro.

Con los datos del problema puede hacerse un diagrama de árbol como el siguiente.



a) $P(Paro \cap H) = P(H) \cdot P(Paro / H) = 0,58 \cdot 0,16 = 0,0928$.

b) Como no se especifica si es hombre o mujer, la probabilidad de que una persona esté en paro es:

$$P(Paro) = P(M) \cdot P(Paro / M) + P(H) \cdot P(Paro / H) \Rightarrow \\ P(Paro) = 0,42 \cdot 0,24 + 0,58 \cdot 0,16 = 0,1936$$

Esta fórmula se conoce como de probabilidad total.

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(H / Paro) = \frac{P(H \cap Paro)}{P(Paro)} = \frac{P(H) \cdot P(Paro / H)}{P(Paro)} = \frac{0,58 \cdot 0,16}{0,1936} = \frac{0,0928}{0,1936} \approx 0,48$$

La fórmula anterior se llama de Bayes.

(Sin necesidad de utilizar la fórmula de Bayes: por cada 0,1936 parados, 0,0928 son hombres)

→ También puede hacerse una tabla de contingencia, partiendo, por ejemplo, de 10000 personas activas.

Personas Activas (10000)		En paro
Mujeres	42 % → 4200	24 % → 1008
Hombres	58 % → 5800	16 % → 928
Total	10000	1936

a) $P(Paro \cap H) = \frac{928}{10000} = 0,0928$.

b) $P(H / Paro) = \frac{928}{1936} \approx 0,48$.

11. Un examen de respuesta múltiple consta de 100 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Cada respuesta acertada suma un punto, la respuesta en blanco suma 0; pero las respuestas erróneas restan.

- ¿Cuánto debe restarse por cada uno de los fallos para que el examen sea equitativo?
- ¿Qué calificación obtendrá un alumno que acierta 67 preguntas, falla 21 y deja 12 en blanco?

Solución:

a) La respuesta puede enfocarse como sigue:

Si cada pregunta tiene 4 opciones, de las que solo una es verdadera, si se responde al azar, la probabilidad de acertar será $\frac{1}{4}$; y la de fallar, $\frac{3}{4}$.

Por tanto, cabe esperar que de las 100 preguntas del examen: acertará 25; y fallará, 75.

Su puntuación, que debe ser 0, es el resultado de la suma de $25 \cdot 1 - 75 \cdot x$, siendo x lo que hay que restar por cada fallo.

Luego:

$$25 \cdot 1 - 75 \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Por cada fallo hay que restar $1/3$.

Nota: Este problema es un ejemplo de los llamados “juegos de suma 0”, en los que todos los jugadores tienen la misma posibilidad de ganar y de perder. Nadie juega con ventaja.

En estos juegos la esperanza matemática vale 0.

Recuerda que la esperanza matemática, la media de una distribución, se calcula mediante la

expresión: $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$.

En este caso hay dos opciones:

Acierto: suma $x_1 = 1$, con $p_1 = \frac{1}{4}$; fallo : suma x_2 , con $p_2 = \frac{3}{4}$.

Como $x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 0 \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{4} + x_2 \cdot \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}$.

b) Si un alumno acierta 67 preguntas, falla 21 y deja 12 en blanco, su calificación será de :

$$67 \cdot 1 - 21 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot 0 = 67 - 7 = 60 \text{ puntos.}$$

12. Un examen consta de 10 preguntas del tipo verdadero/falso. Se aprueba con 8 o más preguntas acertadas. Si todas las preguntas se responden al azar, ¿qué probabilidad hay de aprobar?

Solución:

Se trata de una distribución binomial: $B(10, 0,5)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &= \binom{10}{8} \cdot (0,5)^8 \cdot (0,5)^2 + \binom{10}{9} \cdot (0,5)^9 \cdot (0,5) + \binom{10}{10} \cdot (0,5)^{10} = (45 + 10 + 1) \cdot (0,5)^{10} = 0,0546875. \end{aligned}$$

13. Se han reunido 1000 familias con 3 hijos. ¿En cuántas de ellas puede esperarse que haya exactamente 2 chicas? ¿Y en cuántas al menos una chica? (Supón iguales la probabilidad de nacimiento de niña o niño, 0,5).

Solución:

El número de chicas en familias de 3 hijos se distribuye $B(3, 0,5)$.

Para una familia, la probabilidad de dos chicas es:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5) = 3 \cdot (0,5)^3 = 0,375.$$

Por tanto, el número esperado de familias con 2 chicas entre las 1000 familias consideradas será:

$$1000 \cdot 0,375 = 375.$$

Para una familia: $P(\text{“al menos una chica”}) = 1 - P(\text{ninguna chica}) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,125 = 0,875$.

Para mil familias: $1000 \cdot 0,875 = 875$ tendrán al menos una chica.

14. Un laboratorio farmacéutico ha comprobado que un 40 % de las personas que toman un analgésico sufren efectos secundarios. De 5 usuarios, halla la probabilidad de que sufran efectos secundarios:

- a) Más de 3. b) Al menos 2.

Solución:

El número (X) de usuarios con efectos secundarios se distribuye según la binomial $B(5, 0,4)$.

Por tanto:

$$\text{a) } P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \cdot (0,4)^4 \cdot (0,6) + \binom{5}{5} \cdot (0,4)^5 = 0,0768 + 0,01024 = 0,08704.$$

b) Al menos 2 son los casos $X = 2, 3, 4$ y 5. Como su contrario es $X = 0$ y 1 entonces:

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \binom{5}{0} \cdot (0,4)^0 \cdot (0,6)^5 - \binom{5}{1} \cdot (0,4) \cdot (0,6)^4 = \\ = 1 - 0,07776 - 0,2592 = 0,66304.$$

15. En un proceso de fabricación se producen un 5 % de piezas defectuosas. Si se examinan 6 de ellas al azar, ¿qué probabilidad existe de que:

- a) Haya a lo sumo 4 defectuosas. b) Haya una o dos defectuosas.

Solución:

El número de defectuosas, X , se distribuye $B(6, 0,05)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \leq 4) &= 1 - P(X = 5) - P(X = 6) = 1 - \binom{6}{5} \cdot (0,05)^5 \cdot (0,95) - \binom{6}{6} \cdot (0,05)^6 = \\ &= 1 - 0,00000148 - 0,0000000156 \approx 0. \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(X=1) + P(X=2) = \binom{6}{1} \cdot (0,05) \cdot (0,95)^5 - \binom{6}{2} \cdot (0,05)^2 \cdot (0,95)^4 = 0,2321 + 0,0305 = 0,2626.$$

16. Una familia se compone de los padres y 6 hijos. Suponiendo igual la probabilidad de nacimiento de niño o niña, calcula:

- a) Probabilidad de tener más de una niña.
b) Al menos un niño.
c) Como máximo dos niños.
d) El número medio de hijas.

Solución:

El número de hijas se distribuye como una binomial $B(6, 0,5)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0} \cdot (0,5)^6 - \binom{6}{1} \cdot (0,5)^6 = \\ &= 1 - 0,015625 - 0,09375 = 0,890625. \end{aligned}$$

b) $P(X < 6) = 1 - P(X = 6) = 1 - \binom{6}{6} \cdot (0,5)^6 = 1 - 0,015625 = 0,984375.$

c) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0,2344 + 0,0938 + 0,0156 = 0,3438$.

d) La media de hijas es $6 \cdot 0,5 = 3$.

17. Cuatro personas de edades y estado de salud semejantes, han contratado una póliza de vida. Las tablas de mortalidad prevén un 0,7 de probabilidad de que esos asegurados vivan dentro de 25 años. Encuentra la probabilidad de que dentro de 25 años:

- a) Vivan los 4. b) No viva ninguno. c) El número medio de supervivientes.

Solución:

El número de supervivientes se ajusta a una binomial: $B(4, 0,7)$.

La probabilidad de éxito (seguir vivo dentro de 25 años) es $p = 0,7$; la de fracaso (morir antes), $q = 0,3$.

$$a) P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (0,7)^4 = 0,7^4 = 0,2401.$$

$$b) P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot (0,7)^0 \cdot (0,3)^4 = 0,3^4 = 0,0081.$$

$$c) \text{ La media es } 4 \cdot 0,7 = 2,8.$$

18. En un Centro Comercial el 35 % de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?

Solución:

El número de usuarios que utilizan el coche para hacer la compra se puede estudiar como una variable binomial $B(7, 0,35)$.

$$P(X = 3) = \binom{7}{3} 0,35^3 \cdot 0,65^4 = 35 \cdot 0,00765... \approx 0,2679.$$

19. Un examen de preguntas con respuestas múltiples, consta de 8 preguntas con 4 opciones de contestación. Si un alumno respondiera al azar halla, con la ayuda de la tabla binomial, la probabilidad de que:

- a) Responda correctamente a 6
- b) Responda al menos 6 correctamente
- c) El número medio de respuestas acertadas.

Solución:

La variable que cuenta el número de respuestas correctas, es una binomial $B(8, 1/4) = B(8, 0,25)$.

$$a) P(X = 6) = \binom{8}{6} 0,25^6 \cdot 0,75^2 = 28 \cdot 0,0001373... \approx 0,003845.$$

$$b) \text{ Responder "al menos" 6, es equivalente a responder 6, 7 u 8 preguntas correctamente, o sea, } P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = 0,003845 + 0,000366 + 0,000015 = 0,00426.$$

$$c) \text{ El número medio de respuestas correctas será: } 8 \cdot 0,25 = 2.$$

20. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:

- a) No acierte ninguna respuesta correcta.
- b) Acierte 6 o más preguntas.

Solución:

Si se contesta al azar, la probabilidad de acertar $p = \frac{1}{3}$; la de fallar, $q = \frac{2}{3}$.

Se trata de una distribución de probabilidad binomial, $B\left(8, \frac{1}{3}\right)$.

$$a) P(X = 0) = \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561} = 0,039.$$

$$b) P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) =$$

$$= \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 28 \cdot \frac{4}{6561} + 8 \cdot \frac{2}{6561} + \frac{1}{6561} = \frac{129}{6561} = 0,0197.$$

21. En España, en el año 2020, aproximadamente el 15 % de la población había nacido en algún país extranjero. Si se elige una muestra aleatoria de n individuos y se desea estimar cuántos de ellos son nacido en el extranjero, tal experimento puede estudiarse como una $B(n, 0,15)$.

En el caso de que el tamaño muestral sea $n = 8$, halla la probabilidad de que:

- a) Ninguno haya nacido en el extranjero.
- b) Al menos uno de ellos sea de origen extranjero.
- c) Exactamente 5 de ellos lo sean.
- d) Los 8 hayan nacido en el extranjero.

Solución.

La distribución de probabilidad es una binomial $B(8, 0,15)$: $n = 8$; $p = 0,15$; $q = 0,85$.

Si la variable aleatoria X mide el número de nacidos en el extranjero, entonces:

a) $P(X = 0) = \binom{8}{0} 0,15^0 \cdot 0,85^8 \approx 1 \cdot 0,2725 = 0,2725.$

b) “Al menos uno” es el suceso contrario de “ninguno”. por tanto:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,2725 = 0,7275$$

c) $P(X = 5) = \binom{8}{5} 0,15^5 \cdot 0,85^3 = 56 \cdot 0,0000759375 \cdot 0,614125 \approx 0,0026.$

d) $P(X = 8) = \binom{8}{8} 0,15^8 \cdot 0,85^0 = 1 \cdot 0,000000256 \approx 0.$