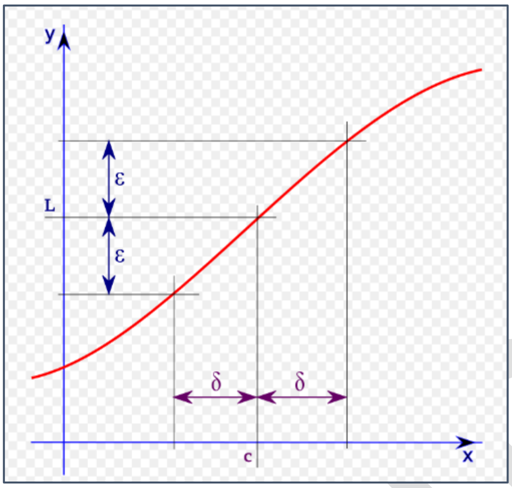
1. LÍMITES DE FUNCIONES, CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS

1.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

1.1.1 – LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Límite de una función en un punto concreto ©:
Se escribe: $\lim_{x \to c} f(x) = l$
Se lee: El límite cuando x tiende a c de f(x) es ℓ

Definición: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c.

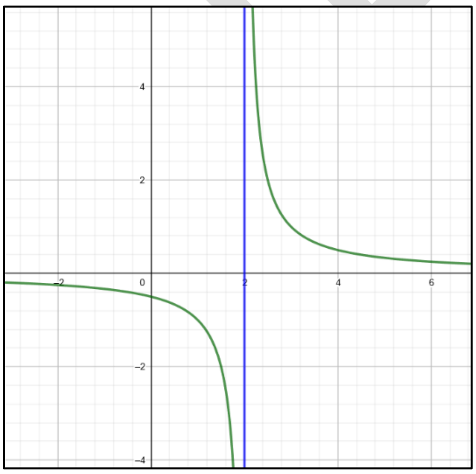


Definición rigurosa:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0 \; tal\ que \; |x - c| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

Se lee de la siguiente forma, para todo número real ϵ por muy pequeño que sea, existe otro número real δ, tal que la imagen del intervalo del eje X $(c - \delta, c + \delta)$ esta dentro del intervalo en el eje Y $(L - \epsilon, L + \epsilon)$

Notas:
- Tenemos que entender un límite como que al acercamos en el eje de las x al número c, a que valor se acerca la función en el eje de las y.
- Que x se aproxima a "c" significa que toma valores muy cerca de "c" (Se puede acercar por la izquierda o por la derecha). Estos son llamados límites laterales y los veremos más adelante
- *Si* ℓ es $+\infty$ ó $-\infty$, entonces significa que cuando nos acercamos a **x = c la función se nos va al** $+\infty$ ó $-\infty$, y por tanto, **x = c es una asíntota vertical**.



Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x-2}$

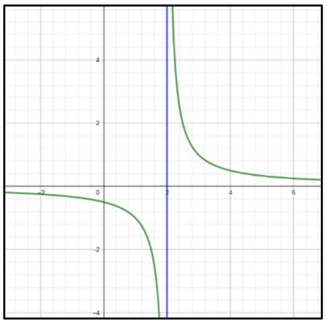
En esta función cuando me acerco a c, realmente no me estoy acercando a ningún número concreto.

Límites laterales de una función en un punto c:

- Límite por la derecha: $\lim_{x\to c^+} f(x) = l$

  Se lee: El límite cuando x tiende a c por la derecha de f(x) es ℓ

  Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c por la derecha.

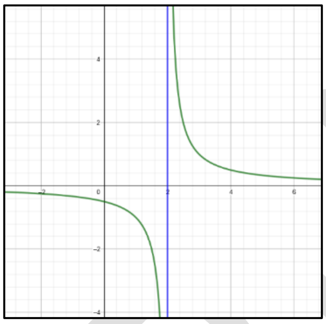


En este caso $\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$

- Límite por la izquierda: $\lim_{x\to c^-} f(x) = l$

  Se lee: El límite cuando x tiende a c por la izquierda de f(x) es ℓ

  Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x se aproxima a c por la izquierda.



En este caso $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Existencia del límite

Para que exista el límite de una función en un punto es necesario que existan los dos límites laterales, sean iguales, es decir, que

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

5.1.2 – LÍMITES EN EL INFINITO

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	Se lee: El límite cuando x tiende **a más infinito** de f(x) es más infinito Significa: la función toma valores grandes positivos cuando la x toma valores grandes positivos. (1º cuadrante)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es menos infinito. Significa: la función toma valores grandes negativos cuando la x toma valores grandes positivos. (4º cuadrante)
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$	Se lee: El límite cuando x tiende a más infinito de f(x) es ℓ Significa: ℓ es el valor al que se aproxima f(x) cuando x toma valores muy grandes positivos: **y =** ℓ **es una asíntota vertical.**

Veamos como se calcula el límite de una función si no hay indeterminaciones:

- Para calcular los **límites en un punto concreto** (no en más o menos infinito) como primer paso **sustituiremos la x por el valor** al que nos aproximamos, si al intentar calcular ese valor nos resultase una operación que no se puede hacer (dividir por cero o raíz par de un número negativo), lo llamaríamos indeterminación, pero si nos da un número concreto, ese será el límite.
  Ejemplo: $\lim_{x\to3} x^2 = 3^2 = 9 \quad o \quad \lim_{x\to2} \frac{5x}{x-5} = \frac{10}{2-5} = -\frac{10}{3}$

- Para calcular los **límites en el** $\pm\infty$**,** hay que tener muy claro cuales son las funciones que dominan sobre otras, es decir, que en el infinito, hacen insignificantes otras funciones.
  Por ejemplo, si comparamos la función x con la función 2^x, ambas en el infinito son muy diferentes, veamos una tabla de valores:

x	2^x	Diferencia
1	2	1
2	4	2
10	1024	1014
20	1048576	1048556
30	1073741824	1073741794

Como vemos en la tabla, la función 2^x hace que la función x parezca insignificante ya en $x = 30$, imaginemos en valores mucho más grandes cual será la diferencia.
En este caso, tendremos en cuenta el signo de la función que es mayor para determinar si es $\pm\infty$. Veamos ahora una tabla que tiene las funciones según su "velocidad de tendencia al infinito".

++++	+++	++	+
Exponenciales (exponente positivo). Crece más rápido cuanto mayor sea la base o el exponente. Ojo: Si el exponente es negativo, no es válido	**Potenciales** (a mayor exponente, mayor velocidad de crecimiento). Las radicales son un caso particular de estas con exponentes fraccionarios.	**Racionales**. Se deben comparar los exponentes del numerador y del denominador, y es equivalente a una potencial que tenga como exponente la diferencia de ellos	**Logarítmicas:** Estas funciones crecen más despacio si son de base positiva mayor que 1
Ej: $3^x \ o \ 2^{x^2}$	**Ej:** $x^5 \ o \ 3x^2$	**Ej:** $\frac{x^4-1}{x^2+1}$	**Ej:** $\ln(x^2+1)$

1.1.2 – INDETERMINACIONES

En algunos casos, como ya hemos dicho anteriormente, al calcular el límite en un punto en concreto o en el $\pm\infty$ nos resulta una operación que no podemos llevar a cabo, y a eso lo llamaremos indeterminación, y se llama así porque no lo podemos determinar ya que puede tomar valores muy variopintos, para cada una de ellas hay una forma de resolverlas.

Ejemplo: $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{0}$ pero está operación no se puede hacer en matemáticas, entonces tenemos que ver cómo hacerlo.

Pero antes de tratar los tipos de indeterminaciones (Ind.), vamos a operar con el ∞. Veamos cuales son las operaciones usuales, sea $a\in\mathbb{R}, a>0$

Sumas/Restas	Productos	Cocientes	Potencias
$\infty+\infty=+\infty$	$(+\infty)(+\infty)=+\infty$	$\frac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}=IND$	$(+\infty)^{(+\infty)}=+\infty$
$\infty-\infty=IND$	$(+\infty)(-\infty)=-\infty$	$\frac{a}{(\pm\infty)}=0$	$(+\infty)^{(-\infty)}=0$
$-(-\infty)=+\infty$	$(-\infty)(-\infty)=+\infty$	$\frac{(\pm\infty)}{a}=\pm\infty$	$(+\infty)^{a}=+\infty$
$\infty+a=+\infty$	$a\cdot(+\infty)=+\infty$	$\frac{0}{\pm\infty}=0$	$(+\infty)^{-a}=0$
$\infty-a=+\infty$	$-a\cdot(+\infty)=-\infty$	$\frac{(\pm\infty)}{0}=\pm\infty$	$a^{+\infty}=+\infty$
$\infty-0=+\infty$	$0\cdot\infty=IND$	$\frac{a}{0}=\pm\infty$	

Tipo de ind.	¿Dónde aparecen?	¿Cómo se resuelve?
$k/0$	Aparecen en funciones racionales en un punto en concreto	• Se resuelven calculando los límites laterales, en este caso, siempre los límites laterales serán $\pm\infty$. El signo depende del signo del numerador al sustituir el punto y de signo del 0 del denominador al acercarnos por la izquierda o por la derecha. Habrá una asíntota vertical en el punto donde estamos calculando el límite. Ej $\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-3}=\frac{6}{0}\ \ Ind.\Rightarrow$

		Por la izquierda $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+3}{x-3}\overset{\substack{sustituimos\\2.99}}{=}\frac{+5.99}{-0.01}\to\frac{+6}{0^-}=-\infty$ Por la derecha $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+3}{x-3}\overset{\substack{sustituimos\\3.01}}{=}\frac{+6.01}{0.01}\to\frac{+6}{0^+}=+\infty$
$0/0$	Aparecen en funciones racionales y en divisiones de radicales en el cálculo de límites a un punto en concreto (no a $\pm\infty$)	• Si ambas son funciones racionales, se procederá factorizando los polinomios y simplificando factores comunes. Ej: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}\ IND\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}x+3=6$ • Si tenemos radicales, se resuelve multiplicando por el conjugado del elemento que nos causa la indeterminación arriba y abajo. El multiplicar por el conjugado hace que nos aparezca el factor que nos causaba el 0 como polinomio para poder simplificarlo. En caso de que hubiera también polinomios, habría que factorizarlos igualmente. Ej: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\ IND\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}=$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=(1+1)(\sqrt{1}+1)=4$
$\infty-\infty$	Aparece en resta de funciones racionales, en resta de radicales o en resta de cualquier tipo de funciones, calculando límites al $\pm\infty$.	• Si ambas son funciones racionales, se procederá realizando la resta para transformarlo en una indeterminación. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\ IND\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}=$ • Si tenemos radicales, se resuelve multiplicando por el conjugado del elemento que nos causa la indeterminación arriba y abajo. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+ax+1})=\infty-\infty\ IND$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+ax+1})\frac{(2x+\sqrt{4x^2+ax+1})}{(2x+\sqrt{4x^2+ax+1})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^2-(4x^2+ax+1)}{(2x+\sqrt{4x^2+ax+1})}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-ax-1}{(2x+\sqrt{4x^2+ax+1})}=\frac{-a}{2+\sqrt{4}}=-\frac{a}{4}$ • Si las funciones que aparecen son variadas, lo calcularemos teniendo en cuenta la velocidad de crecimiento. Ej: $\lim\limits_{x\to\infty}e^x-x^2+2x-lnx\overset{\substack{e^x\ manda\ en\ vel.\\de\ crecimiento}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}e^x=+\infty$ Para comprobarlo es suficiente con sustituir un valor en la x, no demasiado grande para poder visualizarlo en la calculadora.

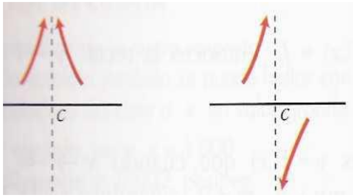
∞/∞	Aparece siempre en división de funciones (sean polinomios, raíces u otro tipo de función) y calculando límites hacia el $\pm\infty$	• Si es división de polinomios, miraremos los grados de los polinomios numerador y denominador.
		  ○ Si $gr(numerador)>gr(denonminador)$, será $\pm\infty$. El signo dependerá de la división de signos de los coeficientes de mayor grado.
		  Ej: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^3-x^2}{x^2+2}=-\infty$, porque el signo de $\frac{-2}{1}=-2$
		  ○ Si $gr(numerador)>gr(denominador)$, será 0
		  Ej: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^3-x^2}{x^5+2}=0$
		  ○ Si $gr(numerador)=gr(denominador)$, se dividen los coeficientes de mayor grado y ese es el límite.
		  Ej: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^3-x^2}{3x^3+2}=\frac{-4}{3}$
		• Si en el denominador no tenemos polinomios y si otras funciones, tendremos que mirar la velocidad de crecimiento de cada una y aplicar una lógica similar a la anterior dependiendo donde está la función que más rápido crece y la función que menos.
		$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x^2}{e^x}=0$ porque la función del denominador tiene mayor velocidad de crecimiento que la del numerador
		• La regla de L´Hopital nos permite un control sobre la velocidad de crecimiento de las funciones, pero solo es parte del currículo en Mat II.

$0\cdot\infty$	Aparece en producto de cualquier tipo de funciones	• En este caso se puede transformar esa indeterminación en una indeterminación ∞/∞ sin más que poner en el denominador la inversa de la función que en el límite se va a 0, y resolverlos de esa forma.

		Ej: $\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x} = \infty\cdot 0 \quad IND \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ teniendo en cuenta la velocidad de crecimiento de las dos funciones. Utilizando la regla de L´Hopital sería de la siguiente forma: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{\substack{Derivando\\ Num\ y\ den}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$
1^{∞}	Aparece cuanto tenemos funciones elevadas a otras funciones	• Esta indeterminación se resuelve transformando esta ecuación en un límite similar al número e o aplicando la fórmula: Si el límite es $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x)[f(x)-1]}$ aunque el límite podría ser un punto concreto Ej. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x}{2x-1}-1\right)\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x-2x+1}{2x-1}\right)\right)} = e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{2x-1}\cdot\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

5. ASÍNTOTAS Y RAMAS INFINITAS

- **Asíntotas verticales: Son rectas verticales a las que se aproxima una función**
  Se dan cuando al acercarnos a $x = c$ $y \to \pm\infty$

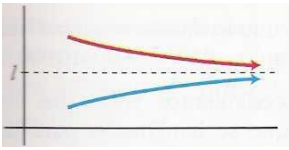


Se deben calcular en:
  - Puntos que anulan el denominador de una función racional
  - Puntos que anulan lo que está dentro del logaritmo
  - Para hallar cual es el límite en cada lado, hay que hallar los límites laterales

Ej: La función estudiada anteriormente $\frac{x+3}{x-3}$ tiene una asíntota vertical en $x = 3$

- **Asíntotas horizontales: Son rectas horizontales a las que se aproxima una función**

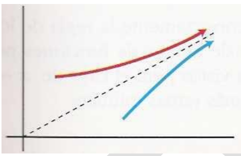
$x \to \infty$ $y -> b$ $En\ funciones\ racionales\ cuando(Grado\ numerador \leq Grado\ denominador)$



Se calculan al hallar los límites en $\pm\infty$ de la función y luego dar un valor grande (o pequeño) para comprobar si se aproxima por abajo o por arriba.

Ej: La función estudiada anteriormente $\frac{x+3}{x-3}$ tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ puesto que:
$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x-3} = 1$

- **Asíntotas oblicuas: $y = mx + n$, son rectas oblicuas a las que se aproxima una función (Grado Numerador – Grado denominador = 1)**



Se dan en funciones racionales cuyo numerador tiene un grado más que el denominador.
Se calculan hallando los siguientes límites en el $\pm\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $\quad y \quad$ $\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = n$ y, estos dos parámetros determinan la recta oblicua.

Ej: $f(x) = \frac{x^3-2}{3x^2-5x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3-2}{3x^2-5x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{3x^3-5x^2} = \frac{1}{3}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2}{3x^2-5x} - \frac{1}{3}x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2-x^3+\frac{5}{3}x^2}{3x^2-5x} = 5/6 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$

5.3 - CONTINUIDAD

La idea de función continua es la de que "puede ser construida con un solo trazo", pero matemáticamente se traduce en que una función es continua en el punto $x = a$, si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en el punto.

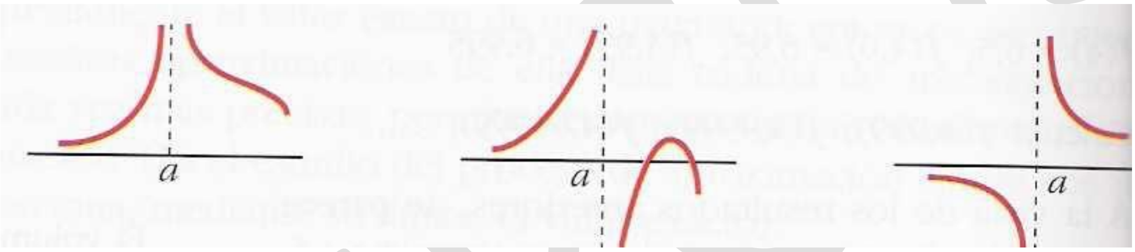
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Todas las funciones definidas por expresiones analíticas elementales (es decir, todas las que conocemos hasta ahora, exceptuando las funciones a trozos), son continuas en todos los puntos de su dominio (las funciones racionales, recordemos que no son continuas en los puntos que no están en su dominio)

Las funciones a trozos habrá que estudiarlas en los extremos de sus trozos que pertenezcan al dominio.

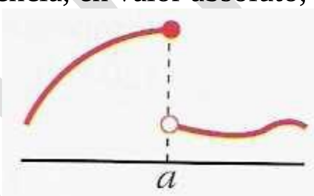
<u>**Tipos de discontinuidades**</u>:

- **Discontinua inevitable de salto infinito**: Si alguno de los límites laterales es infinito o no existe.



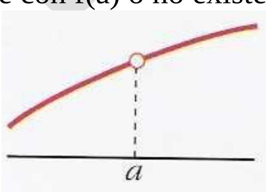
Ejemplo: $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$

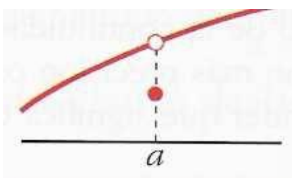
- **Discontinua inevitable de salto finito**: Si los dos límites laterales son finitos pero distintos. El salto es la diferencia, en valor absoluto, de los límites laterales.



Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x < a \\ e^{-x+a} & x \geq a \end{cases}$

- **Discontinua evitable**: Si los dos límites laterales son finitos e iguales, pero su valor no coincide con f(a) o no existe f(a)





Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases}$