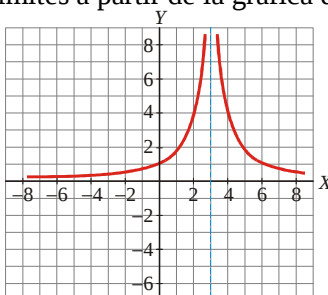
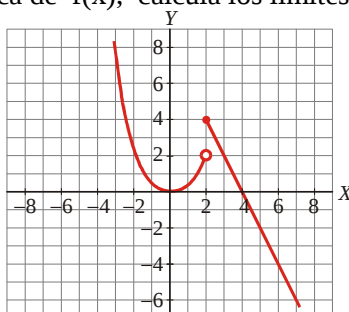
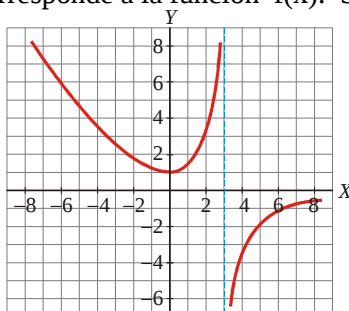


TEMA 11 – LÍMITES, CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS**Cálculo de límites sobre la gráfica**EJERCICIO 1 : Calcula los siguientes límites a partir de la gráfica de $f(x)$:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

EJERCICIO 2 : Dada la siguiente gráfica de $f(x)$, calcula los límites que se indican:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

EJERCICIO 3 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$. Sobre ella, calcula los límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Cálculo de límites inmediatosEJERCICIO 4 : Calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4}{x^2 + 2x + 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 9}$ c) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2 + x + 1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6-3x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \log x$ g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} 3^{x+1}$
- i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x$ j) $\lim_{x \rightarrow -2} (3-x)^2$ k) $\lim_{x \rightarrow -8} (1 + \sqrt{-2x})$ l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x$

Cálculo de límites e interpretación geométrica**EJERCICIO 5 :** Calcula los siguientes límites e interpreta geoméricamente el resultado.

- | | | | |
|--|---|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1}{(2-x)^3}$ | 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x^3}{x^2-1}$ | 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5+3x}$ | 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{5+3x}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^3}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x^3}{x^2}$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-x}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-2x+1}$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4-x^2}$ | 10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2x-6}$ | 11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+1}$ | 12) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+5}{x+3}$ |
| 13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ | 14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x+3x^3)$ | 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+3x}{x^2-1}$ | 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - x^2 \right)$ |
| 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1+x^2}$ | 18) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ | 19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-4}$ | 20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4-3x}{x^4+1}$ |

EJERCICIO 6 : Calcular los siguientes límites:

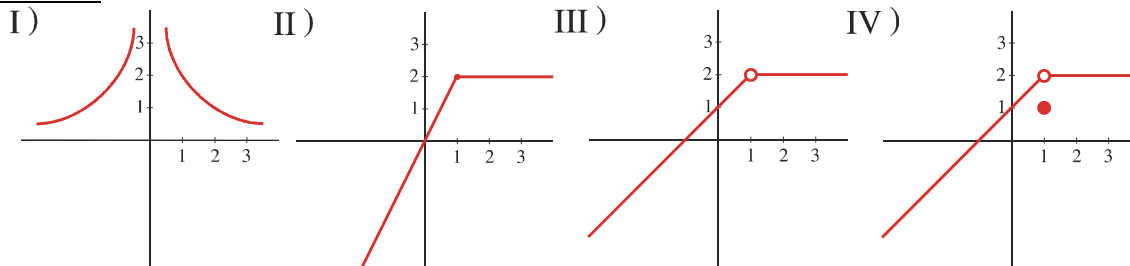
- | | | | |
|---|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ | b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2-3x} - x \right)$ | c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+2x+1}}{2x+7}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{2}{x-4}}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-1}$ | f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+1}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{2x} \right)^{\frac{1}{x-2}}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+x^2-4x-4}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-x^2-x+1}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2}$ | k) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{(x+1)^2}$ | l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2-3x+7} - 2x$ |

EJERCICIO 7 : Calcular los siguientes límites:

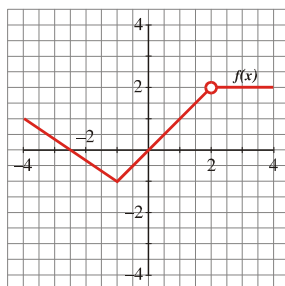
- | | | | |
|--|---|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2-24x+48}{x-4}$ | b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}$ | c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^{x+c}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2}$ | g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x}$ | h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x+3}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{x^3-1}$ | j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{\sqrt{x+4}-3}$ | k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+3} \right)^{2x}$ | l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{\frac{x}{2}}$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+x} - x$ | n) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9}$ | | |

EJERCICIO 8 : Calcula el límite cuando $x \rightarrow 3$ de cada una de las siguientes funciones y representa los resultados obtenidos en cada caso:

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x$ | b) $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ | c) $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ |
|--------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|

Estudio de la continuidad a partir de una gráfica**EJERCICIO 9 :** Dadas las funciones:

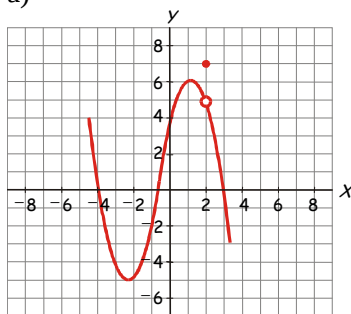
- a) Di si son continuas o no. b) Halla la imagen de $x = 1$ para cada una de las cuatro funciones.

EJERCICIO 10 : Dada la gráfica:

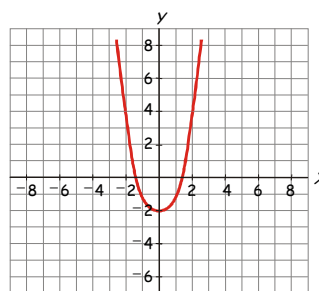
- a) Di si $f(x)$ es continua o no. Razona tu respuesta. b) Halla $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ y $f(3)$.

EJERCICIO 11 : ¿Son continuas las siguientes funciones en $x = 2$?

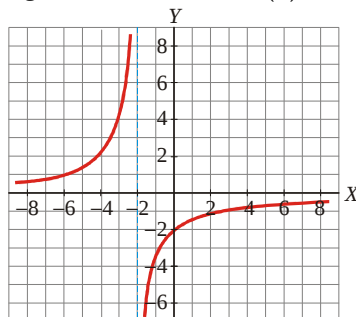
a)



b)



Si alguna de ellas no lo es, indica la razón de la discontinuidad.

EJERCICIO 12 : Esta es la gráfica de la función $f(x)$:

- a) ¿Es continua en $x = -2$?
 b) ¿Y en $x = 0$?
 Si no es continua en alguno de los puntos, indica la causa de la discontinuidad.

Estudio de la continuidad a partir de su expresión analítica**EJERCICIO 13 :** Averiguar los puntos e intervalos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$a) y = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-5x+6}} \quad b) y = \frac{x+5}{x^2-5x+6} \quad c) y = \sqrt{x^2-5x+6}$$

EJERCICIO 14 : Estudia la continuidad de las funciones siguientes y represéntalas gráficamente:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2-15 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad e) f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad f) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1-x^2 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 15 : Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } -6 \leq x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -2x+13 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 3 & \text{si } x > 5 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2+x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad c) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 16 : Hallar $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) ¿ Existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?b) Estudia su continuidad en el punto $x = 2$ **EJERCICIO 17 :** Halla el valor de k para que $f(x)$ sea continua en $x=1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO 18 : Halla el valor de m para que $f(x) = \begin{cases} 3x^2+mx-1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**Asíntotas y ramas infinitas****EJERCICIO 19 :** Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:

$$a) f(x) = \frac{1}{4-x^2} \quad b) f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-2} \quad c) f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)^2} \quad d) f(x) = \frac{-x^3+x}{2}$$

$$e) f(x) = \frac{x^3-1}{x+3} \quad f) f(x) = \frac{x}{x^2-9} \quad g) f(x) = \frac{x^3-2x^2}{2x+1} \quad h) f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$$

$$i) f(x) = \frac{x^4+2x}{x^2+1} \quad j) f(x) = \frac{1-3x}{2-x} \quad k) f(x) = \frac{1+x^2}{x^3} \quad l) f(x) = \frac{x}{x+2}$$

$$m) f(x) = \frac{4x^2-3}{x} \quad n) f(x) = x^2-x$$