Ejercicios

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

1 Factoriza estos polinomios de segundo grado:

a) $x^2 - x - 42$ b) $2x^2 + 5x - 3$

c) $-3x^2 - 8x - 5$ d) $x^2 - x - 42$

2 Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ b) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

c) $x^3 + 2x^2 - 15x$ d) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

3 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^5 - 2x^3 + 3x^2$

b) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

c) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

d) $3x^3 + 7x^2 - 18x + 8$

e) $3x^3 + 9x^2 + 8x + 2$

4 Averigua cuáles de los siguientes polinomios son irreducibles:

a) $x^2 - 5x - 14$ b) $x^2 + 3x + 1$

5 Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de polinomios:

a) $P(x) = x^3 - x$; $Q(x) = x^2 + 2x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 2x - 3$; $Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

6 Reduce a común denominador las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x+1}{x^2-9}$, $\frac{x^2-1}{3-x}$ y $\frac{-1}{1+x}$

b) $\frac{x}{2x+1}$, $\frac{3}{2x^2+x-1}$ y $\frac{x+2}{6x-3}$

7 Comprueba si son equivalentes las siguientes parejas de fracciones:

a) $\frac{x}{x-1}$ y $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ b) $\frac{x^3}{x^3+x^2}$ y $\frac{1}{x^2}$

8 Efectúa:

a) $1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{x}$ b) $\frac{5-x}{5} \cdot \frac{x+5}{5}$

c) $\frac{x-1}{x^2} : \frac{x+1}{x^3}$ d) $\frac{x+7}{x^2+3x-18} : \frac{x^2+6x-7}{x-3}$

9 Sean las fracciones:

$$M = \frac{x^2-3x}{2x^2-7x+3} \text{ y } N = \frac{x^2-x}{x^3+4x^2+3x}$$

Simplifícalas y calcula $M + N$.

10 Simplifica estas fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2+x-2}{x^2-4}$ b) $\frac{(x^2-x-2)^2}{x^2+4x+3}$

c) $\frac{x(x-1)(x+2)}{3x^3+4x^2-5x-2}$ d) $\frac{2xy-3x+x^2}{2y^3-3y^2+x^2y^2}$

11 Opera y simplifica el resultado:

a) $\frac{x+1}{6x} : \frac{x-1}{7x^2}$ b) $\left(1-\frac{x}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{2x+3}\right)$

c) $\frac{\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}$ d) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}\right)^2$

12 Simplifica, cuando sea posible, y opera.

a) $\frac{x-3y}{5} - \frac{4x-5y}{6}$ b) $\frac{2xy-x}{xy} + \frac{y-3x}{x} + \frac{1}{4}$

c) $\frac{x-y}{1+xy} : \left(1-\frac{x-y}{1+xy}\right)$ d) $ab + \frac{a}{a-b} - \frac{a-1}{a+2b}$

NÚMEROS COMBINATORIOS. BINOMIO DE NEWTON

13 Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(\sqrt{x} - xy)^4$ b) $(ab^3 + 2a)^5$ c) $(2xy^2 + \sqrt{y})^4$

14 Calcula las siguientes expresiones:

a) $3\left(\binom{7}{3} + \binom{7}{4}\right) : 6\binom{8}{4}\binom{8}{1}$

b) $15\left(\binom{15}{11}\cdot\binom{15}{11}\cdot\binom{15}{1}\right) - \binom{7}{0}\cdot\binom{15}{11}$

15 Determina el valor de a para que se verifiquen las siguientes ecuaciones:

a) $\binom{12}{a+4} + \binom{12}{9} = \binom{13}{9}$ b) $\binom{6}{a} = \binom{6}{a+2}$

c) $\binom{9}{4} + \binom{9}{a+2} = \binom{10}{5}$ d) $\binom{5}{a}\cdot\binom{5}{5} = 5$

ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

16 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{2} + x = \frac{1}{6} - \frac{2x}{3}$

b) $\frac{2x-1}{2} - \frac{5x+1}{4} = \frac{1}{5} + 3x$

c) $x - \frac{4x-1}{3} = \frac{2x+1}{2} + 5$

d) $\frac{1}{5} + x + \frac{4x-1}{3} = -\frac{2x}{5} + \frac{1}{6}$

Ejercicios con una dificultad especial.

Ejercicios

17 Resuelve estas ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 2 = 0$ b) $x^2 - 5x - 14 = 0$

c) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ d) $4x^2 - 5x - 21 = 0$

18 Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones:

a) 1 y 3 b) -2 y $\frac{1}{3}$ c) 0 y 3 d) -1 y 1

19 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $4x^2 - 20x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}x = 0$

20 Determina, sin resolverlas, el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 + 5x - 12 = 0$ b) $x^2 - 2x + 6 = 0$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$ d) $x^2 + 0{,}2x - 1{,}5 = 0$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x - 2)^2 - (x + 1)^2 + 3x = x(x - 3)$

b) $\frac{x^2 + 1}{3} + \frac{2x^2 - 3}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x + 3}{2}$

c) $\frac{x(x - 1)}{2} + \frac{(2x - 1)^2}{3} = x + \left(\frac{x}{2} + 1\right)$

d) $(a + x)(b + x) = (a + bx) + 2x^2$

ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR A DOS

22 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ b) $2x^4 - 9x^2 - 5 = 0$

c) $5x^4 - 3x^2 + \frac{7}{16} = 0$ d) $3x^4 + 8x^2 + 4 = 0$

23 Resuelve las ecuaciones polinómicas:

a) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$

24 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x - 3}{3} + \frac{x}{4} - \frac{3x - 1}{10} = \frac{15x + 56}{60}$

b) $5(x - 3) + 4x(x - 4) + x^2(x - 7) = -13$

c) $5(x^2 - 1) + 7(x - 3) + x^2(2 - x) + 13 = 0$

d) $\frac{15}{x^2} = 6x^2 - \frac{81}{4}$

ECUACIONES RACIONALES

25 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{48}{5(x - 3)} - \frac{33}{5(x + 2)} + x^2 + 6 = 0$

b) $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} = \frac{18x + 22}{2x + 10}$

c) $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 1} = \frac{24x^4}{x^4 + x^2}$

d) $\frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 1} + \frac{x^2 - 3}{x + 3} = -\frac{2x}{x + 3}$

ECUACIONES CON RADICALES

26 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 2\sqrt{x + 1} = 18$ b) $17 + \sqrt{169 - x^2} = x$

c) $4x - 3\sqrt{2x - 1} = 2$ d) $\frac{\sqrt{x - 1}}{2} + 7x = 36$

27 Resuelve estas ecuaciones con radicales:

a) $\sqrt{x + 4} + 4x = 3x - 2$ b) $\sqrt{x + 15} = x - 5$

c) $\frac{1}{\sqrt{x + 8}} + \frac{2}{\sqrt{x - 4}} = \frac{5}{4}$ d) $\sqrt{2x + 7} + \sqrt{2x + 16} = 9$

28 Determina el valor que debe tener c para que las siguientes ecuaciones tengan como solución el valor indicado en cada caso:

a) $\sqrt{3x + 10} - \sqrt{4x + 5} = c, \quad x = 5$

b) $3\sqrt{4x + 16} + c = 6\sqrt{12 + x}, \quad x = -3$

c) $\frac{2}{\sqrt{4x + 2}} + \frac{c}{\sqrt{3x - 5}} = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{14}{3}$

d) $\frac{c}{3 + \sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt{2x + 7}} = \frac{x + 3}{5}, \quad x = 9$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

29 Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

b) $3^x + 3^{1-x} = 4$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

30 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{7^{x+1}}{49^{x+5}} = 7$

b) $6^{x+5} = 7.776$

c) $5^{3x} - 5^{2x+1} - 29 \cdot 5^x + 105 = 0$

d) $(3^{x+5})^{(3x+1)} = \frac{9^{x^2}}{59\,049}$

Puedes resolver ejercicios similares a este utilizando las TIC, si accedes a tu CD-ROM.

Ejercicios

31 Resuelve estas ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_5 x = 5$ b) $\ln(x^2 - 3) = 0$

c) $\log\left(\frac{5}{2x}\right) = 1$ d) $\log_4(3x - 2) = 3$

32 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log(8 - x) + \log 4 = 2\log x$

b) $2 + \log(x - 16) = 2\log x$

c) $2\log x = 1 + \log(x + 11/10)$

d) $\log 3x = \log 6 + 2\log x$

33 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 2x - \log_2(x^2 - 1) - \log_2(9 - x) + \log_2 4(x - 1) = 0$

b) $\frac{1}{3}\log_2(3x + 5) = 1$

c) $\log(10x^2 - 1) + \log 2 = \log 3 + \log x$

d) $\frac{2\log_2(x - 1) + \log_2 5}{\log_2(7x - 1)} = 1$

SISTEMAS DE ECUACIONES

34 Resuelve y clasifica estos sistemas de ecuaciones lineales usando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} 2x + y - z = -6 \\ 3x - y - 6z = 24 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y - 4z = 27 \\ x - y + z = -3 \\ x + 2y + 6z = -47 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y - z = 2 \\ x + 2y - z = -2 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 7y + z = 8 \\ x - y + 2z = 16 \\ 4x + y - z = -8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -7x + 2z = -14 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ x + 3y + 3z = 7 \\ x - y - 6z = 0 \end{cases}$

35 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} x^2 + x - 12 = y \\ 4x - y - 14 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + x = 2 - x^2 \\ y + 2x = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 3x + 8 = y \\ y + 3x = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + 7y - 15 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2x^2 + y^2 - 18x = 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \sqrt{x + 2y} = x + 5 \\ 2y - 25 = 10x \end{cases}$

g) $\begin{cases} \frac{5}{x + y} - \frac{4}{x} = 3 \\ y + \frac{2}{7} = -\frac{71}{91}(x - 1) \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$

36 Resuelve e interpreta gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = y \\ y - x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 7 = y \\ y + 4x = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x^2 + 6x - 7 = y \\ y + 3x = -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = -5x^2 + 7x + 2 \\ y = \frac{89}{20} \end{cases}$

37 Resuelve estos sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicos:

a) $\begin{cases} 3 \cdot 7^x - 2^{y+2} = -13 \\ 7^{x+1} + 5 \cdot 2^y = 27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6^{x+1} + 5^{y+2} = 41 \\ 2 \cdot 6^x - 6 \cdot 5^y = \frac{54}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log x - 10\log y = 9 \\ 2\log x - 40\log y = 24 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_5(2x + y) \cdot \log_5 4x = 0 \\ 2^{x+2} = 4 \cdot 2^y \end{cases}$

INECUACIONES. SISTEMAS DE INECUACIONES

38 Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a) $3x - 2(x + 1) + 7(x + 2) < \frac{x}{5}$

b) $\frac{x + 5}{3} - \frac{8x + 3}{4} - x \geqslant 8$

39 Resuelve estas inecuaciones polinómicas:

a) $x^3 - 2x^2 - 8x < 0$

b) $2x^3 + x^2 - 22x + 24 < 0$

c) $4x^5 - 27x^4 + 50x^3 - 24x^2 \geqslant 0$

d) $x^4 + 2x^3 - 57x^2 - 58x + 111 \leqslant 0$

e) $x^3 + 8x^2 - 15x - 54 > 0$

40 Resuelve estas inecuaciones racionales:

a) $\frac{2x^2 - 18}{x^2 - 1} > 0$ b) $\frac{x^2 - 6x - 27}{x^2 - 13x + 40} < 0$

c) $\frac{-x^2 + 14x - 48}{-x^3 + 9x^2 - 18x} \geqslant 0$ d) $\frac{-x^2 + 7x - 12}{x^4 - 8x^3 + 7x^2} \leqslant 0$

e) $\frac{12x^2 - 11x + 2}{x + 7} > 0$ f) $\frac{x - 5}{x^2 - 2x - 99} \geqslant 0$

41 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 5x \leqslant 0 \\ \frac{x - 7}{x + 3} > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + 7x - 44 > 0 \\ \frac{x - 8}{x - 5} \leqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{3x^2 - 31x + 56}{4 - x} > 0 \\ x^3 - 21x^2 + 108x \leqslant 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x - 7}{x^2 - 16x + 39} < 0 \\ 5x^3 - 26x^2 + 35x - 6 \geqslant 0 \end{cases}$

1º BACHILLERATO CIENCIAS

UNIDAD 2. ÁLGEBRA

1 a) $x^2 - x - 42 = (x-7)\cdot(x+6)$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} = \begin{cases} 7 \\ -6 \end{cases}$$

b) $2x^2 + 5x - 3 = 2\cdot\left(x - \frac{1}{2}\right)\cdot(x+3) = (2x-1)\cdot(x+3)$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$

c) $-3x^2 - 8x - 5 = -3\cdot\left(x + \frac{5}{3}\right)\cdot(x+1) = (-3x-5)\cdot(x+1)$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{-6} = \frac{8 \pm 2}{-6} = \begin{cases} \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3} \\ \frac{6}{-6} = -1 \end{cases}$$

d) $x^2 - x - 42 =$

$x = 1 \pm \sqrt{1+}$ } Repetido.

2 a) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-1)(x-5)\cdot(x+2)$

	1	-4	-7	10
1		1	-3	-10
	1	-3	-10	0

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

b) $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)\cdot(x^2+2)$

	1	-1	2	-2
1		1	0	2
	1	0	2	0

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$ No tiene solución

c) $x^3 + 2x^2 - 5x = x(x^2 + 2x - 5) = x\cdot\left(x - (-1+\sqrt{6})\right)\left(x - (-1-\sqrt{6})\right) = (*)$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^3 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2\cdot 3}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$(*) = x\cdot(x+1-\sqrt{6})\cdot(x+1+\sqrt{6})$

d) $2x^3+3x^2-2x-3 = 2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right) = (x-1)(x+1)\cdot(2x+3)$

	2	3	−2	−3
1		2	5	3
	2	5	3	0

$2x^2+5x+3=0$

$x = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4} = \frac{-5\pm1}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$

3 a) $x^5-2x^3+3x^2 = x^2\cdot(x^3-2x+3)$

b) $x^4-3x^3-3x^2+11x-6 = (x-1)^2\cdot(x-3)\cdot(x+2)$

	1	−3	−3	11	−6
1		1	−2	−5	6
	1	−2	−5	6	0
1		1	−1	−6	
	1	−1	−6	0	

$x^2-x-6=0$

$x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{1\pm5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

c) $x^4+2x^3-13x^2-14x+24 = (x-1)(x+2)\cdot(x-3)(x+4)$

	1	2	−13	−14	24
1		1	3	−10	−24
	1	3	−10	−24	0
−2		−2	−2	24	
	1	1	−12	0	

$x^2+x-12=0$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1\pm7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

d) $3x^3+7x^2-18x+8$

	3	7	−18	8
1		3	10	−8
	3	10	−8	0

$3x^2+10x-8=0$

$x = \frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{6} = \frac{-10\pm\sqrt{196}}{6} = \frac{-10\pm14}{6} = \begin{cases} \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ \frac{-24}{6} = -4 \end{cases}$

e) $3x^3+9x^2+8x+2$

	3	9	8	2
-1		-3	-6	-2
	3	6	2	0

$3x^2+6x+2=0$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{6}=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{6}=\frac{-6\pm\sqrt{2^2\cdot 3}}{6}=$

$=\frac{-6\pm 2\sqrt{3}}{6}=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$3x^3+9x^2+8x+2=3(x+1)\cdot\left(x-\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=$

$=3(x+1)\cdot\left(x+1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(x+1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

8 a) $1+\frac{x}{3}-\frac{2}{x}=\frac{3x}{3x}+\frac{x^2}{3x}-\frac{6}{3x}=\boxed{\frac{x^2+3x-6}{3x}}$

b) $\frac{5-x}{5}\cdot\frac{x+5}{5}=\frac{(5-x)\cdot(6+x)}{25}=\boxed{\frac{25-x^2}{25}}$

c) $\frac{x-1}{x^2}:\frac{x+1}{x^3}=\frac{(x-1)x^3}{x^2(x+1)}=\frac{x(x-1)}{x+1}=\boxed{\frac{x^2-x}{x+1}}$

d) $\frac{x+7}{x^2+3x-18}:\frac{x^2+6x-7}{x-3}=\frac{x+7}{(x-3)(x+6)}:\frac{(x-1)(x+7)}{x-3}=\frac{(x+7)(x-3)}{(x-3)(x+6)(x-1)(x+7)}=$

$x^2+3x-18=0$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{2}=\frac{-3\pm 9}{2}=\begin{cases}\frac{6}{2}=3\\ \frac{-12}{2}=-6\end{cases}$

$=\boxed{\frac{1}{x^2+5x-6}}$

$x^2+6x-7=0$ $\quad x=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2}=\begin{cases}1\\ -7\end{cases}$

9 $M=\frac{x^2-3x}{2x^2-7x+3}=\frac{x(x-3)}{2\cdot(x-3)(x-\frac{1}{2})}=\frac{x}{2x-1}$

$N=\frac{x^2-x}{x^3+4x^2+3x}=\frac{x(x-1)}{x(x^2+4x+3)}=\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}$

$M+N=\frac{x}{2x-1}+\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}=\frac{x\cdot(x^2+4x+3)}{(2x-1)(x+1)(x+3)}+\frac{(x-1)(2x-1)}{(2x-1)(x+1)(x+3)}=$

$=\frac{x^3+4x^2+3x+2x^2-x-2x+1}{(2x-1)(x+1)(x+3)}=\boxed{\frac{x^3+6x^2+1}{2x^3+7x^2+2x-3}}$

10

a) $\frac{x^2+x-2}{x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \boxed{\frac{x-1}{x-2}}$

b) $\frac{(x^2-x-2)^2}{x^2+4x+3} = \frac{[(x-2)\cdot(x+1)]^2}{(x+1)(x+3)} = \frac{(x-2)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)(x+3)} = \boxed{\frac{(x-2)^2}{x+3}}$

c) $\frac{x(x-1)(x+2)}{3x^3+4x^2-5x-2} = \frac{x(x-1)(x+2)}{3\cdot(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+2)} = \boxed{\frac{x}{3x+1}}$

d) $\frac{2xy-3x+x^2}{2y^3-3y^2+x^2y^2} = \frac{x(2y-3+x)}{y^2(2y-3+x^2)}$

11

a) $\frac{x+1}{6x} : \frac{x-1}{7x^2} = \frac{(x+1)\cdot 7x^2}{6x\cdot(x-1)} = \boxed{\frac{7x(x+1)}{6(x-1)} = \frac{7x^2+7x}{6x-6}}$

b) $\left(1-\frac{x}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{2x+3}\right) = \left(\frac{4-x}{4}\right)\cdot\left(\frac{x(2x+3)-(x+1)(x-1)}{(2x+3)(x-1)}\right) =$

$= \frac{4-x}{4}\cdot\frac{2x^2+3x-x^2+1}{(2x+3)(x-1)} = \boxed{\frac{(4-x)\cdot(x^2+3x+1)}{4\cdot(2x+3)(x-1)} = \frac{-x^3+x^2+11x+4}{8x^2+4x-12}}$

c) $\frac{\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x+1}{x}} + \frac{1}{x} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x} =$

$= \frac{x^2+(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x^2-1}{x(x-1)(x+1)} = \boxed{\frac{2x^2-1}{x^3-x}}$

d) $\left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)^2 =$

$= \left(\frac{x-1-2\cdot}{(x-1)(x+1)}\right)^2 = \left(\frac{x-3}{(x-1)(x+1)}\right)^2 = \frac{(x-3)^2}{(x^2-1)^2} =$

$= \boxed{\frac{x^2-6x+9}{x^4-2x^2+1}}$

42 a) $\frac{x-3y}{5} - \frac{4x-5y}{6} = \frac{6(x-3y)-5(4x-5y)}{30} = \frac{6x-18y-20x+25y}{30} =$

$= \boxed{\frac{-14x+7y}{30}}$

b) $\frac{2xy-x}{xy} + \frac{y-3x}{x} + \frac{1}{4} = \frac{4(2xy-x)+4y(y-3x)+xy}{4xy} =$

$= \frac{8xy-4x+4y^2-12xy+xy}{4xy} = \boxed{\frac{-3xy-4x+4y^2}{4xy}} = \boxed{-\frac{3}{4}-\frac{1}{y}+\frac{y}{x}}$

c) $\frac{x-y}{1+xy} : \left(1-\frac{x-y}{1+xy}\right) = \frac{x-y}{1+xy} : \frac{1+xy-x+y}{1+xy} =$

$= \frac{(x-y)\cdot(1+xy)}{(1+xy)\cdot(1+xy-x+y)} = \boxed{\frac{x-y}{1+xy-x+y}}$

d) $ab + \frac{a}{a-b} - \frac{a-1}{a+2b} = \frac{ab(a-b)(a+2b)+a(a+2b)-(a-1)(a-b)}{(a-b)(a+2b)} =$

$= \frac{ab(a^2+2ab-ba-2b^2)+a^2+2ab-(a^2-ab-a+b)}{(a-b)(a+2b)} =$

$= \frac{a^3b+a^2b^2-2ab^3+a^2+2ab-a^2+ab+a-b}{(a-b)(a+2b)} =$

$= \boxed{\frac{a^3b+a^2b^2-2ab^3+ab+a-b}{(a-b)(a+2b)}}$

16 a) $\frac{x}{2} + x = \frac{1}{6} - \frac{2x}{3}$

$\frac{3x}{6} + \frac{6x}{6} = \frac{1}{6} - \frac{4x}{6}$ $\quad 9x = 1 - 4x \quad 13x = 1 \quad \boxed{x = \frac{1}{13}}$

b) $\frac{2x-1}{2} - \frac{5x+1}{4} = \frac{1}{5} + 3x$

$\frac{20x-10}{20} - \frac{25x+5}{20} = \frac{4}{20} + \frac{60x}{20}$

$20x - 10 - 25x - 5 = 4 + 60x$

$-65x = 19 \quad \boxed{x = -\frac{19}{65}}$

19 a) $4x^2 - 20x = 0 \quad 4x(x-5) = 0 \quad 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

b) $3x^2 - 27 = 0 \quad 3x^2 = 27$

$x^2 = 9 \quad \boxed{x = \pm 9}$

c) $x^2 - \frac{4}{9} = 0 \quad x^2 = \frac{4}{9} \quad \boxed{x = \pm \frac{2}{3}}$

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}x = 0 \quad x\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{4}\right) = 0$

$\boxed{x = 0}$

$\frac{3}{5}x - \frac{1}{4} = 0 \quad \frac{3}{5}x = \frac{1}{4} \quad \boxed{x = \frac{5}{12}}$

21 a) $(x-2)^2 - (x+1)^2 + 3x = x(x-3)$

$x^2 - 4x + 4 - (x^2 + 2x + 1) + 3x = x^2 - 3x$

$x^2 - 4x + 4 - x^2 - 2x - 1 + 3x - x^2 + 3x = 0$

$-x^2 + 3 = 0 \quad -x^2 = -3 \quad x^2 = 3 \quad \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$

b) $\frac{x^2+1}{3} + \frac{2x^2-3}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x+3}{2}$

$\frac{4x^2+4}{12} + \frac{6x^2-9}{12} + \frac{6x}{12} = \frac{6x+18}{12}$

$4x^2 + 4 + 6x^2 - 9 + 6x = 6x + 18$

$10x^2 - 5 + 6x - 6x - 18 = 0$

$10x^2 - 23 = 0 \quad x^2 = \frac{23}{10} \quad \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{23}{10}}}$

c) $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{(2x-1)^2}{3} = x + \left(\frac{x}{2}+1\right)$

$\frac{3x(x-1)}{6} + \frac{2(2x-1)^2}{6} = \frac{6x}{6} + \frac{6\left(\frac{x}{2}+1\right)}{6}$

$3x^2 - 3x + 2(4x^2+1-4x) = 6x + 3x + 6$

$3x^2 - 3x + 8x^2 + 2 - 8x - 9x - 6 = 0$

$11x^2 - 20x - 4 = 0$

$x = \frac{20 \pm \sqrt{400+176}}{22} = \frac{20 \pm 24}{22} = \begin{cases} \frac{44}{22} = 2 \\ \frac{-4}{22} = \frac{-2}{11} \end{cases}$

d) $(a+x)(b+x) = (a+bx) + 2x^2$

$ab + ax + bx + x^2 - a - bx - 2x^2 = 0$

$-x^2 + ax + (ab-a) = 0$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4\cdot(ab-a)}}{-2}$$

22 a) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \qquad z = x^2$

$z^2 - 4z + 3 = 0 \qquad z = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

$x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$; $x^2 = 1 \quad x = \pm 1$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{3} \quad x_2 = -\sqrt{3} \quad x_3 = 1 \quad x_4 = -1$

b) $2x^4 - 9x^2 - 5 = 0 \qquad z = x^2$

$2z^2 - 9z - 5 = 0 \qquad z = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4} = \begin{cases} 5 \\ \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$x^2 = 5 \quad x = \pm\sqrt{5}$; $x^2 = -\frac{1}{2}$ ✗ Solución

Soluciones: $x_1 = \sqrt{5} \quad x_2 = -\sqrt{5}$

c) $5x^4 - 3x^2 + \frac{7}{16} = 0$ $\quad z = x^2$

$5z^2 - 3z + \frac{7}{16} = 0$

$\frac{80z^2}{16} - \frac{48z}{16} + \frac{7}{16} = 0 \quad 80z^2 - 48z + 7 = 0$

$z = \frac{48 \pm \sqrt{2304 - 2240}}{160} = \frac{48 \pm 8}{160} = \begin{cases} \frac{56}{160} = \frac{7}{20} \\ \frac{40}{160} = \frac{1}{4} \end{cases}$

$x^2 = \frac{7}{20} \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{20}} \quad ; \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad x = \pm\frac{1}{2}$

Soluciones $x_1 = \sqrt{\frac{7}{20}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{20}}$; $x_3 = \frac{1}{2}$ $\quad x_4 = -\frac{1}{2}$

d) $3x^4 + 8x^2 + 4 = 0 \quad z = x^2$

$3z^2 + 8z + 4 = 0 \quad z = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{-8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \\ \frac{-12}{6} = -2 \end{cases}$

$x^2 = -\frac{2}{3}$ ~~✗~~ solución $\quad x^2 = -2$ ~~✗~~ solución

28) a) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$

	1	−4	−7	10
1		1	−3	−10
	1	−3	−10	0

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1 \quad x_2 = 5 \quad x_3 = -2$

b) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$

	2	3	−2	−3
1		2	5	3
	2	5	3	0

$2x^2 + 5x + 3 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{-5 \pm 1}{4} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Soluciones $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = -\frac{3}{2}$

c) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$

	1	−3	−3	11	−6
1		1	−2	−5	6
	1	−2	−5	6	0
1		1	−1	−6	
	1	−1	−6	0	

$x^2 - x - 6 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1$ (doble) $\quad x_2 = 3 \quad x_3 = -2$

24 a) $\frac{2x-3}{3} + \frac{x}{4} - \frac{3x-1}{10} = \frac{15x+56}{60}$

$\frac{40x-60}{60} + \frac{15x}{60} - \frac{18x-6}{60} = \frac{15x+56}{60} \cdot 60$, $40x-60+15x-18x+6 = 15x+56$

$40x+15x-18x-15x = 56+60-6$

$22x = 110$ $\quad \boxed{x=5}$

b) $5(x-3)+4x(x-4)+x^2(x-7) = -13$

$5x-15+4x^2-16x+x^3-7x^2+13=0$

$x^3-3x^2-11x-2=0$

	1	−3	−11	−2
−2		−2	10	2
	1	−5	−1	0

$\boxed{x_1 = -2}$

$\boxed{x_2 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}}$

$\boxed{x_3 = \frac{5-\sqrt{29}}{2}}$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$

c) $5(x^2-1)+7(x-3)+x^2(2-x)+13=0$

$5x^2-5+7x-21+2x^2-x^3+13=0$

$-x^3+7x^2+7x-13=0$

	−1	7	7	−13
1		−1	6	13
	−1	6	13	0

$\boxed{x_1 = 1}$

$\boxed{x_2 = 3+\sqrt{22}}$

$\boxed{x_3 = 3-\sqrt{22}}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+52}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{88}}{-2} =$

$= \frac{-6 \pm \sqrt{4 \cdot 22}}{-2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{22}}{-2} =$

$= 3 \pm \sqrt{22}$

d) $\frac{15}{x^2} = 6x^2 - \frac{81}{4}$

$\frac{60}{4x^2} = \frac{24x^4}{4x^2} - \frac{81x^2}{4x^2}$

$24z^2-81z-60=0$

$24x^4-81x^2-60=0 \quad z=x^2$

$z = \frac{81 \pm \sqrt{6561+5760}}{48} = \frac{81 \pm \sqrt{12321}}{48} =$

$$z = \frac{81 \pm 111}{48} = \begin{cases} \frac{192}{48} = 4 \longrightarrow z = x^2 = 4 & x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ \frac{-30}{48} = \frac{-5}{8} \longrightarrow z = x^2 = -\frac{5}{8} & x = \pm\sqrt{-\frac{5}{8}} \end{cases}$$

Solución: $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

ECUACIONES RACIONALES

[25] a) $\frac{48}{5(x-3)} - \frac{33}{5(x+2)} + x^2 + 6 = 0$

$$\frac{48(x+2)}{5(x-3)(x+2)} - \frac{33(x-3)}{5(x-3)(x+2)} + \frac{(x^2+6)5(x-3)(x+2)}{5(x-3)(x+2)} = \frac{0}{5(x-3)(x+2)}$$

$$48x + 96 - 33x + 99 + (5x^2 + 30)(x^2 - 3x + 2x - 6) = 0$$

$$15x + 195 + (5x^2 + 30)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$15x + 195 + 5x^4 - 5x^3 - 30x^2 + 30x^2 - 30x - 180 = 0$$

$$5x^4 - 5x^3 - 15x + 15 = 0$$

1)

	5	−5	−15	15
		5	0	−15
	5	0	−15	0

$5x^2 - 15 = 0 \quad 5x^2 = 15$

$x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$

Se comprueban las soluciones y son válidas:

$x_1 = 1 \quad x_2 = \sqrt{3} \quad x_3 = -\sqrt{3}$

b) $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} = \frac{18x + 22}{2x + 10}$

$$(2x + 10)(x^2 - 2x + 3) = (x - 2)(18x + 22)$$

$$2x^3 - 4x^2 + 6x + 10x^2 - 20x + 30 = 18x^2 + 22x - 36x - 44$$

$$2x^3 + 6x^2 - 18x^2 - 14x + 14x + 30 + 44 = 0$$

$$2x^3 - 12x^2 + 74 = 0$$

$$x^3 - 7x^2 + 37 = 0$$

$\downarrow$

$\pm 1, \pm 37$

	1	−7	0	37

No tiene solución.

c) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^2+1} = \dfrac{24x^4}{x^4+x^2}$

$(x^4 - x^2)(x^4 + x^2) = 24x^4(x^2+1)$

$x^8 + x^6 - x^6 - x^4 = 24x^6 + 24x^4$

$x^8 - 24x^6 - x^4 - 24x^4 = 0$

$x^8 - 24x^6 - 25x^4 = 0$

$x^4(x^4 - 24x^2 - 25) = 0 \Rightarrow x^4 = 0$ $\boxed{x = 0}$

$x^4 - 24x^2 - 25 = 0 \quad x^2 = z$

$z^2 - 24z - 25 = 0 \qquad z = \dfrac{24 \pm \sqrt{576+100}}{2} = \dfrac{24 \pm 26}{2} = \begin{cases} 25 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$

$z = x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$z = x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ No tiene solución

Soluciones: ~~$x_1 = 0$~~ $x_2 = 5$ $x_3 = -5$

Comprobación: $\dfrac{0-0}{0+1} = \dfrac{0}{0+0}$ No puede ser el denominador 0 (no válida)

d) $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x-1} + \dfrac{x^2 - 3}{x+3} = \dfrac{-2x}{x+3}$

$\dfrac{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)(x+3)}{(x-1)(x+3)} + \dfrac{(x^2-3)(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{-2x(x-1)}{(x-1)(x+3)}$

$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 27x + 3x^3 - 27x^2 + 81x - 81 + x^3 - x^2 - 3x + 3 = -2x^2 + 2x$

$x^4 - 5x^3 - x^2 + 2x^2 + 51x - 2x - 78 = 0$

$x^4 - 5x^3 + x^2 + 49x - 78 = 0$

	1	-5	1	49	-78
2		2	-6	-10	78
	1	-3	-5	39	0
-3		-3	18	-39	
	1	-6	13	0	

$x^2-6x+13=0$

$x=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}$ ∄

Solucions: $\boxed{x_1=2}$ ~~$x_2=-3$~~ → No vàlida

$\frac{(-3)^3-9\cdot(-3)^2+27(-3)-27}{-3-1}+\frac{(-3)^2-3}{-3+3}=\frac{-2(-3)}{-3+3}$

↖ ↗ Denominadors que es fan 0 (no es pot)

26

a) $3x-2\sqrt{x+1}=18 \quad (3x-18)^2=(2\sqrt{x+1})^2$

$9x^2+324-108x=4(x+1) \quad 9x^2-108x-4x+324-4=0$

$9x^2-112x+320=0 \quad x=\frac{112\pm\sqrt{12544-11520}}{18}=\frac{112\pm32}{18}=\begin{cases}\frac{144}{18}=8\\ \frac{80}{18}=\frac{40}{9}\end{cases}$

Comprobar solucions: $x=8 \quad 24-2\sqrt{9}=24-6=18$ (SI)

$x=\frac{40}{9} \quad \frac{40}{3}-2\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{40}{3}-\frac{14}{3}=\frac{26}{3}\neq 18$ (NO)

Solució: $x=8$

b) $17+\sqrt{169-x^2}=x \quad (\sqrt{169-x^2})^2=(x-17)^2$

$169-x^2=x^2+289-34x \quad 2x^2-34x+120=0$

$x=\frac{34\pm\sqrt{196}}{4}=\frac{34\pm14}{4}=\begin{cases}\frac{48}{4}=12 \rightarrow 17+\sqrt{25}=17+5\neq 12 & \text{(NO)}\\ \frac{20}{4}=5 \rightarrow 17+\sqrt{144}=17+12\neq 5 & \text{(NO)}\end{cases}$

No té solució.

c) $4x-3\sqrt{2x-1}=2 \quad (4x-2)^2=(3\sqrt{2x-1})^2$

$16x^2+4-16x=9(2x-1) \quad 16x^2-16x+4=18x-9$

$16x^2-34x+13=0 \quad x=\frac{34\pm\sqrt{324}}{32}=\frac{34\pm18}{32}=\begin{cases}\frac{52}{32}=\frac{13}{8} & \frac{13}{8}\\ \frac{16}{32}=\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{cases}$

Comprobacions: $x=\frac{13}{8} \rightarrow \frac{13}{2}-3\sqrt{\frac{18}{8}}=\frac{13}{2}-3\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{13}{2}-3\,\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2$ (SI)

$x=\frac{1}{2} \quad 2-3\sqrt{1-1}=2-3\cdot 0=2$ SI

Solucions: $x_1=\frac{13}{8} \quad x_2=\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{x-1}}{2} + 7x = 36$ $\quad \frac{\sqrt{x-1}}{2} + \frac{14x}{2} = \frac{72}{2}$ $\quad \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (72-14x)^2$

$x - 1 = 5184 + 196x^2 - 2016x$ $\quad 196x^2 - 2017x + 5185 = 0$

$x = \frac{2017 \pm \sqrt{3249}}{392} = \frac{2017 \pm 57}{392} = \begin{cases} \frac{2074}{392} = \frac{1037}{196} \\ \frac{1960}{392} = 5 \end{cases}$

Comprobación: $x = \frac{1037}{196}$ $\quad \frac{\sqrt{\frac{1037}{196} - \frac{196}{196}}}{2} + 7 \cdot \frac{1037}{196} = \frac{\sqrt{\frac{841}{196}}}{2} + \frac{1037}{28} =$

$= \frac{\frac{29}{14}}{2} + \frac{1037}{28} = \frac{29}{28} + \frac{1037}{28} = \frac{1066}{28} \neq 36$ (No)

$x = 5$ $\quad \frac{\sqrt{4}}{2} + 7 \cdot 5 = 1 + 35 = 36$ (Sí)

Solución: $x = 5$

27] a) $\sqrt{x+4} + 4x = 3x - 2$ $\quad \sqrt{x+4} = 3x - 2 - 4x$ $\quad \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (-x-2)^2$

$x + 4 = x^2 + 4 + 4x$ $\quad x^2 + 4x - x + 4 - 4 = 0$ $\quad x^2 + 3x = 0$

$x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -3$

Comprobación: $x = 0$ $\quad \sqrt{4} + 0 = 0 - 2$ $\quad 2 \neq -2$ No

$x = -3$ $\quad \sqrt{1} + 4 \cdot (-3) = -9 - 2$

$1 - 12 = -11$ (Sí)

Solución: **$x = -3$**

b) $\left(\sqrt{x+15}\right)^2 = (x-5)^2$ $\quad x + 15 = x^2 + 25 - 10x$

$x^2 - 11x + 10 = 0$ $\quad x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2} = \begin{cases} \frac{20}{2} = 10 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

Comprobación: $x = 10$ $\quad \sqrt{10+15} = 10 - 5 \rightarrow \sqrt{25} \neq 5$ Sí

$x = 1$ $\quad \sqrt{16} = 1 - 5$ $\quad 4 \neq -4$ No

Solución $x = 10$

d) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{2x+16} = 9$

$(\sqrt{2x+7})^2 = (9 - \sqrt{2x+16})^2 \quad 2x+7 = 81 + 2x + 16 - 18\sqrt{2x+16}$

$18\sqrt{2x+16} = 2x - 2x + 81 + 16 - 7 \quad 18\sqrt{2x+16} = 90$

$(\sqrt{2x+16})^2 = (5)^2 \quad 2x+16 = 25 \quad 2x = 9 \quad x = \frac{9}{2}$

Comprobación: $\sqrt{\frac{18}{2}+7} + \sqrt{\frac{18}{2}+16} = \sqrt{16} + \sqrt{25} = 4+5 = 9$ sí

Solución: $x = \frac{9}{2}$

ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

29] a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \quad z = 2^x$

$z^2 - 5z + 4 = 0 \quad z = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$z = 2^x = 4 = 2^2 \quad \boxed{x = 2}$

$z = 2^x = 1 \quad \boxed{x = 0}$

b) $3^x + 3^{1-x} = 4 \quad 3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \quad z = 3^x$

$z + \frac{3}{z} = 4 \quad \frac{z^2}{z} + \frac{3}{z} = \frac{4z}{z} \quad z^2 - 4z + 3 = 0$

$z = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \to z = 3^x = 3 & \boxed{x = 1} \\ 1 \to z = 3^x = 1 & \boxed{x = 0} \end{cases}$

c) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$

$2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 = 480 \quad z = 2^x$

$z + 2z + 4z + 8z = 480 \to 15z = 480$

$z = 32 \quad z = 2^x = 32 = 2^5 \quad \boxed{x = 5}$

30 a) $\frac{7^{x+1}}{49^{x+5}} = 7$ ~~$\frac{7^{x+1}}{(7^{x+5})^2}$~~

$\frac{7^{x+1}}{(7^2)^{x+5}} = 7$ $\frac{7^{x+1}}{7^{2(x+5)}} = 7$ $\frac{7^{x+1}}{7^{2x+10}} = 7$

$7^{x+1} = 7 \cdot 7^{2x+10}$ $7^{x+1} = 7^{1+2x+10}$ $\Rightarrow x+1 = 1+2x+10$

$\Rightarrow 1-1-10 = 2x-x$ $\boxed{-10 = x}$

b) $6^{x+5} = 7776$ $6^{x+5} = 6^5$ $x+5 = 5$ $\boxed{x = 0}$

c) $5^{3x} - 5^{2x+1} - 29 \cdot 5^x + 105 = 0$

$(5^x)^3 - 5^{2x} \cdot 5 - 29 \cdot 5^x + 105 = 0$

$(5^x)^3 - 5 \cdot (5^x)^2 - 29 \cdot 5^x + 105 = 0$ $z = 5^x$

$z^3 - 5z^2 - 29z + 105 = 0$

	1	-5	-29	105
(3)		3	-6	-105
	1	-2	-35	0

$z^2 - 2z - 35 = 0$

$z = \frac{2 \pm \sqrt{4+140}}{2} = \frac{2 \pm 12}{2} = \begin{cases} 7 \\ \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$

$z = 3 \rightarrow 5^x = 3$ $\log 5^x = \log 3$ $x \log 5 = \log 3$ $\boxed{x = \frac{\log 3}{\log 5}}$

$z = 7 \rightarrow 5^x = 7$ $\log 5^x = \log 7$ $x \log 5 = \log 7$ $\boxed{x = \frac{\log 7}{\log 5}}$

$z = -5 \rightarrow 5^x = -5$ $\log 5^x = \log(-5)$ Nu există.

d) $(3^{x+5})^{(3x+1)} = \frac{9^{x^2}}{59049} \rightarrow 3^{(x+5)(3x+1)} = \frac{(3^2)^{x^2}}{3^{10}}$

$3^{3x^2+x+15x+5} = \frac{3^{2x^2}}{3^{10}} \rightarrow 3^{3x^2+16x+5} = 3^{2x^2-10}$

$3x^2 + 16x + 5 = 2x^2 - 10$ $x^2 + 16x + 15 = 0$ $x = \frac{-16 \pm \sqrt{196}}{2} =$

Soluciones $x_1 = -1$ $x_2 = -15$ $= \frac{-16 \pm 14}{2} = \begin{cases} -1 \\ -15 \end{cases}$

B1

a) $\log_5 x = 5 \qquad x = 5^5 = \boxed{3125}$

b) $\log(x^2-3) = 0 \qquad x^2-3 = 1 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \pm\sqrt{4} = \boxed{\pm 2}$

c) $\log\left(\frac{5}{2x}\right) = 1 \qquad 10^1 = \frac{5}{2x} \qquad 20x = 5 \qquad x = \frac{5}{20} = \boxed{\frac{1}{4}}$

d) $\log_4(3x-2) = 3 \qquad 4^3 = 3x-2 \qquad 64 = 3x-2 \qquad 66 = 3x \qquad \boxed{x = 22}$

B2

a) $\log(8-x) + \log 4 = 2\log x$

$\log(8-x)\cdot 4 = \log x^2 \Rightarrow x^2 = 4(8-x) = 32-4x \qquad x^2+4x-32 = 0$

$x = \frac{-4\pm\sqrt{16+128}}{2} = \frac{-4\pm 12}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = \boxed{4} \\ \frac{-16}{2} = \boxed{-8} \end{cases}$ Se comprueban y son válidas

b) $2 + \log(x-16) = 2\log x$

$\log 10^2 + \log(x-16) = \log x^2 \Rightarrow \log 100(x-16) = \log x^2$

$100x - 1600 = x^2 \qquad x^2 - 100x + 1600 = 0$

$x = \frac{100\pm\sqrt{3600}}{2} = \frac{100\pm 60}{2} = \begin{cases} \boxed{80} \\ \boxed{20} \end{cases}$ Se comprueban y son válidas.

c) $2\log x = 1 + \log(x+11/10)$

$\log x^2 = \log 10 + \log(x+\frac{11}{10}) \Rightarrow \log x^2 = \log 10(x+\frac{11}{10})$

$x^2 = 10x + 11 \qquad x^2 - 10x - 11 = 0 \qquad x = \frac{10\pm\sqrt{144}}{2} = \frac{10\pm 12}{2} = \begin{cases} \boxed{11} \\ \boxed{-1} \end{cases}$

Soluciones válidas.

d) $\log 3x = \log 6 + 2\log x$

$\log 3x = \log 6 + \log x^2 \Rightarrow \log 3x = \log 6x^2 \Rightarrow 3x = 6x^2$

$6x^2 - 3x = 0 \qquad x(6x-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \qquad 6x-3 = 0 \qquad \boxed{x = 2}$

$\downarrow$

Solución no válida

Solución: $x = 2$

33 a) $\log_2 2x - \log_2(x^2-1) - \log_2(9-x) + \log_2 4(x-1) = 0$

$$\log_2 \frac{2x \cdot 4(x-1)}{(x^2-1)(9-x)} = \log_2 1$$

$$\frac{8x(x-1)}{(x^2-1)(9-x)} = 1 \qquad 8x^2 - 8x = (x^2-1)(9-x)$$

$$8x^2 - 8x = 9x^2 - 9 - x^3 + x$$

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$$

	1	-1	-9	9
1		1	0	-9
	1	0	-9	0

$x^2 - 9 = 0 \quad x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Comprobació:

$x = 1$ $\log_2 2 - \log_2 0 - \log_2 8 + \log_2 4 \cdot 0 = 0$ No valida.

$x = 3$ $\log_2 6 - \log_2 8 - \log_2 6 + \log_2 4 \cdot 2 = 0$ Sí

$x = -3$ $\log_2(-6) - \log_2 8 - \log_2 12 + \log_2 4 \cdot (-4) = 0$ No valida.

Solució $x = 3$

b) $\frac{1}{3}\log_2(3x+5) = 1 \qquad \log_2(3x+1) = 3 \qquad \log_2(3x+1) = 3\log_2 2$

$\log_2(3x+1) = \log_2 2^3 \qquad 3x+1 = 8 \qquad 3x = 7 \qquad x = \frac{7}{3}$ Solució valida.

c) $\log(10x^2-1) + \log 2 = \log 3 + \log x$

$\log(10x^2-1)\cdot 2 = \log 3x \qquad (10x^2-1)\cdot 2 = 3x \qquad 20x^2 - 2 - 3x = 0$

$20x^2 - 3x - 2 = 0 \qquad x = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{40} = \frac{3 \pm 13}{40} = \begin{cases} \frac{16}{40} = \frac{2}{5} & \text{valida} \\ \frac{-10}{40} = -\frac{1}{4} & \text{No valida} \end{cases}$

Solució $x = \frac{2}{5}$

d) $\dfrac{2\log_2(x-1) + \log_2 5}{\log_2(7x-1)} = 1 \qquad \log_2(x-1)^2 + \log_2 5 = \log_2(7x-1)$

$\log_2(x-1)^2 \cdot 5 = \log_2(7x-1) \qquad 5(x^2-2x+1) = 7x-1$

$5x^2 - 10x + 5 - 7x + 1 = 0 \qquad 5x^2 - 17x + 6 = 0 \qquad x = \frac{17 \pm 13}{10} = \begin{cases} \frac{30}{10} = 3 \\ \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$

Solucions valides.

34

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & -6 & 24 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - F_2]{-3F_1+2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & -9 & 66 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \end{pmatrix}$

$-2z = -12 \quad \boxed{z = 6}$

$-5y - 9 \cdot 6 = 66$

$-5y - 54 = 66$

$-5y = 120 \quad \boxed{y = -24}$

Sistema compatible determinado

$2x + y - z = -6$

$2x = -6 - y + z \rightarrow 2x = -6 + 24 + 6 \quad 2x = 24 \quad \boxed{x = 12}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 6 & -47 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 - 2F_3]{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 27 \\ 0 & 3 & -6 & 33 \\ 0 & -3 & -16 & 121 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 27 \\ 0 & 3 & -6 & 33 \\ 0 & 0 & -22 & 154 \end{pmatrix}$

Sistema compatible determinado

$-22z = 154 \quad \boxed{z = -7}$

$3y - 6z = 33 \quad 3y + 42 = 33 \quad 3y = -9 \quad \boxed{y = -3}$

$2x + y - 4z = 27 \quad 2x - 3 + 28 = 27 \quad 2x = 2 \quad \boxed{x = 1}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad 0z = -3$ Sistema incompatible

d) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 16 \\ 4 & 1 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 16 \\ 3 & -7 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4F_1+F_3]{-3F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 16 \\ 0 & -4 & -5 & -40 \\ 0 & 5 & -9 & -72 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{5F_2+4F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 16 \\ 0 & -4 & -5 & -40 \\ 0 & 0 & -61 & -488 \end{pmatrix}$

$-61z = -488 \quad \boxed{z = 8}$

$-4y - 5 \cdot 8 = -40$

$-4y = -40 + 40 \quad -4y = 0 \quad \boxed{y = 0}$

Sistema compatible determinado

$x - y + 2z = 16$

$x - 0 + 16 = 16 \quad \boxed{x = 0}$

e) $\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 \\ -7 & 0 & 2 & -14 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{matrix} y & x & z \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -14 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -14 \\ 0 & -7 & 2 & -14 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-F_2+F_3} \begin{matrix} y & x & z \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Sistema compatible indeterminado.

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \\ F_1-2F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -9 & -13 \\ 0 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

$0t = 12$ Sistema incompatible

35 a) $\begin{cases} x^2 + x - 12 = y \\ 4x - y - 14 = 0 \end{cases}$ $4x - 14 = y \Rightarrow x^2 + x - 12 = 4x - 14$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

$x = 1$ $y = 4x - 14 = 4 - 14 = -10$

$x = 2$ $y = 8 - 14 = -6$

Solución $x = 1$ $y = -10$
$x = 2$ $y = -6$

⊛ Continúa en página 11

37 a) $\begin{cases} 3 \cdot 7^x - 2^{y+2} = -13 \\ 7^{x+1} + 5 \cdot 2^y = 27 \end{cases}$ $\begin{cases} 3 \cdot 7^x - 2^y \cdot 2^2 = -13 \\ 7^x \cdot 7 + 5 \cdot 2^y = 27 \end{cases}$ $p = 7^x$ $t = 2^y$

$\begin{cases} 3p - 4t = -13 & \cdot 5 \\ 7p + 5t = 27 & \cdot 4 \end{cases}$ $15p - 20t = -65$
$28p + 20t = 108$
$43p = 43$ $p = 1 = 7^x$ $x = 0$

$3p - 4t = -13 \longrightarrow 3 - 4t = -13$ $3 + 13 = 4t$ $16 = 4t$ $t = 2$

$t = 2^y = 2$ $y = 1$

Solución $x = 0$ $y = 1$

b) $\begin{cases} 6^{x+1} + 5^{y+2} = 41 \\ 2\cdot 6^x - 6\cdot 5^y = \frac{54}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} 6^x\cdot 6 + 5^y\cdot 5^2 = 41 \\ 10\cdot 6^x - 30\cdot 5^y = 54 \end{cases}$ $u = 6^x$ $v = 5^y$

$\begin{cases} 6u + 25v = 41 \quad \cdot -5 \\ 10u - 30v = 54 \quad \cdot 3 \end{cases}$ $-30u - 125v = -205$

$30u - 90v = 162$

$-215v = -43$ $v = \frac{43}{215} = \frac{1}{5}$

$6u + 25\cdot\frac{1}{5} = 41$

$6u + 5 = 41 \longrightarrow 6u = 36$ $u = 6$

$u = 6 = 6^x$ $\boxed{x = 1}$ $v = \frac{1}{5} = 5^y$ $\boxed{y = -1}$

Solución: $x = 1$ $y = -1$

c) $\begin{cases} \log x - 10\log y = 9 \quad \cdot(-2) \\ 2\log x - 40\log y = 24 \quad \cdot 1 \end{cases}$ $-2\log x + 20\log y = -18$

$2\log x - 40\log y = 24$

$-20\log y = 6$

$\log y = \frac{6}{-20} = -\frac{3}{10}$

$\boxed{y = 10^{-3/10}}$

$\cdot(-4)$ $-4\log x + 40\log y = -36$

$2\log x - 40\log y = 24$

$-2\log x = -12$

$\log x = 6$ $\boxed{x = 10^6}$

Se comprueban las soluciones y son válidas.

d) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} \log xy = \log 10 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 10 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$

$x = 12 - 2y \longrightarrow (12 - 2y)y = 10$ $12y - 2y^2 = 10$

$-2y^2 + 12y - 10 = 0$ $y = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{-4} = \frac{-12 \pm 8}{-4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{-20}{-4} = 5 \end{cases}$

$y = 1$ $xy = 10$ $\boxed{x = 10}$

$y = 5$ $x\cdot y = 10$ $x\cdot 5 = 10$ $\boxed{x = 2}$

Soluciones $\boxed{x = 10 \quad y = 1}$ $\boxed{x = 2 \quad y = 5}$

Se comprueban las soluciones y son válidas.

35 (Continuación)

b) $\begin{cases} y + x = 2 - x^2 \\ y + 2x = -4 \end{cases} \rightarrow y = -4 - 2x$ sustitución

$-4 - 2x + x = 2 - x^2 \qquad x^2 - x - 6 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

Si $x = 3 \quad y = -4 - 2x = -4 - 6 = -10$
Si $x = -2 \quad y = -4 - 2x = -4 + 4 = 0$

Soluciones:
$x_1 = 3 \quad y_1 = -10$
$x_2 = -2 \quad y_2 = 0$

c) $\begin{cases} x^2 - 3x + 8 = y \\ y + 3x = 12 \end{cases} \rightarrow y = 12 - 3x$ sustitución

$x^2 - 3x + 8 = 12 - 3x \qquad x^2 - 4 = 0 \qquad x^2 = 4 \qquad x = \pm 2$

Si $x = 2 \quad y = 12 - 3x = 6$
Si $x = -2 \quad y = 12 - 3x = 18$

Soluciones:
$x_1 = 2 \quad y_1 = 6$
$x_2 = -2 \quad y_2 = 18$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + 7y - 15 = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 = 5 - y^2$

$5 - y^2 + 7y - 15 = 0 \qquad -y^2 + 7y - 10 = 0$

$y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2} = \frac{-7 \pm 3}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$

Si $y = 5 \quad x^2 = 5 - y^2 = 5 - 25 = -20$ No hay solución
Si $y = 2 \quad x^2 = 5 - y^2 = 5 - 4 = 1 \qquad x = \pm 1$

Soluciones
$x_1 = 1 \quad y_1 = 2$
$x_2 = -1 \quad y_2 = 2$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2x^2 + y^2 - 18x = 6 \end{cases}$ Reducción

$$\begin{array}{r} x^2 - y^2 = 15 \\ 2x^2 + y^2 = 6 + 18x \\ \hline 3x^2 = 21 + 18x \end{array}$$

$3x^2 - 18x - 21 = 0 \quad (:3)$

$x^2 - 6x - 7 = 0 \qquad x = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} 7 \\ -1 \end{cases}$

Si $x=7$ $\quad x^2-y^2=15$ $\quad x^2-15=y^2$ $\quad 49-15=y^2$

$34=y^2$ $\quad y=\pm\sqrt{34}$

Si $x=-1$ $\quad y^2=x^2-15$ $\quad y^2=1-15=-14$ No tiene solución

Soluciones: $x_1=7;\ y_1=\sqrt{34}$

$x_2=7;\ y_2=-\sqrt{34}$

f) $\begin{cases}\sqrt{x+2y}=x+5\\ 2y-25=10x\end{cases}$ $\quad 2y=10x+25$ $\quad y=\dfrac{10x+25}{2}$

Sustitución: $\sqrt{x+2\cdot\left(\dfrac{10x+25}{2}\right)}=x+5$

$\sqrt{x+10x+25}=x+5$

$\left(\sqrt{11x+25}\right)^2=(x+5)^2$

$11x+25=x^2+10x+25$ $\quad x^2-x=0$

$x(x-1)=0$ $\quad x=0$ $\quad x-1=0$ $\quad x=1$

Si $x=0$ $\quad y=\dfrac{10x+25}{2}=\dfrac{25}{2}$

Si $x=1$ $\quad y=\dfrac{10+25}{2}=\dfrac{35}{2}$

Soluciones: $x_1=0$ $\quad y_1=\dfrac{25}{2}$ $\quad x_2=1$ $\quad y_2=\dfrac{35}{2}$

g) $\begin{cases}\dfrac{5}{x+y}-\dfrac{4}{x}=3\\ y+\dfrac{2}{7}=-\dfrac{71}{91}(x-1)\end{cases}$ $\rightarrow$ $\dfrac{91y}{91}+\dfrac{26}{91}=\dfrac{-71(x-1)}{91}$

$91y=-71x+71-26$ $\quad 91y=-71x+45$ $\quad y=\dfrac{-71x+45}{91}$

Sustitución: $\dfrac{5}{x+\left(\dfrac{-71x+45}{91}\right)}-\dfrac{4}{x}=3$

$$\frac{5}{\frac{91x-71x+45}{91}} - \frac{4}{x} = 3 \qquad \frac{455}{20x+45} - \frac{4}{x} = 3 \quad \begin{matrix}:5\\ :5\end{matrix}$$

$$\frac{91}{4x+9} - \frac{4}{x} = 3 \qquad \frac{91x-4(4x+9)}{x(4x+9)} = \frac{3x(4x+9)}{x(4x+9)}$$

$$91x - 16x - 36 = 12x^2 + 27x$$

$$12x^2 - 48x + 36 = 0 \quad (:12) \longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{matrix}3\\1\end{matrix}$$ (Soluciones válidas ya que no se anulan denominadores)

Si $x = 3$ $\quad y = \frac{-71x+45}{91} = \frac{-168}{91} = \frac{-24}{13}$

Si $x = 1$ $\quad y = \frac{-71x+45}{91} = \frac{-26}{91} = \frac{-2}{7}$

Soluciones:

$x_1 = 3 \quad y_1 = \frac{-24}{13}$

$x_2 = 1 \quad y_2 = \frac{-2}{7}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$ Sustitución $\longrightarrow \frac{3}{x} + \frac{3}{3x-6} = 2 \quad :3$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-2} = 2$$

$$\frac{3(x-2)}{x(x-2)} + \frac{x}{x(x-2)} = \frac{2x(x-2)}{x(x-2)}$$

$$3x - 6 + x = 2x^2 - 4x$$

$$2x^2 - 4x - 4x + 6 = 0 \qquad 2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad (:2)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 3 \qquad x = 1$$

Si $x = 3$ $\quad y = 3x - 6 = 3$

Si $x = 1$ $\quad y = 3x - 6 = -3$

Soluciones:

$x_1 = 3 \quad y_1 = 3$

$x_2 = 1 \quad y_2 = -3$

INECUACIONES. SISTEMAS DE INECUACIONES.

38

a) $3x - 2(x+1) + 7(x+2) < \frac{x}{5}$

$3x - 2x - 2 + 7x + 14 < \frac{x}{5}$ $\qquad 8x + 12 < \frac{x}{5}$

$\frac{40x + 60}{5} < \frac{x}{5}$ $\qquad 39x < -60$ $\qquad x < \frac{-60}{39}$

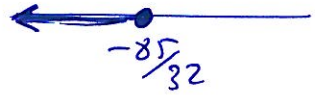
$x \in (-\infty, \frac{-60}{39})$

b) $\frac{x+5}{3} - \frac{8x+3}{4} - x \geq 8$

$\frac{4(x+5)}{12} - \frac{3(8x+3)}{12} - \frac{12x}{12} \geq \frac{96}{12}$

$4x + 20 - 24x - 9 - 12x \geq 96$ $\qquad -32x \geq 85$

$x \leq \frac{85}{-32}$



$x \in (-\infty, \frac{-85}{32}]$

39

a) $x^3 - 2x^2 - 8x < 0$

$x(x^2 - 2x - 8) < 0$

$x(x-4)(x+2) < 0$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

Raíces: $x = 0$ $\quad x = 4$ $\quad x = -2$

	$-\infty$		-2		0		$+4$	∞
x		$-$		$-$		$+$		$+$
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$+$
$x+2$		$-$		$+$		$+$		$+$
Solución		$-$		$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 4)$

b) $2x^3 + x^2 - 22x + 24 < 0$

	2	1	−22	24
2		4	10	−24
	2	5	−12	0

$2x^2 + 5x - 12 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} = \begin{cases} 6/4 = \frac{3}{2} \\ -\frac{16}{4} = -4 \end{cases}$

Raíces: $2, \frac{3}{2}, -4$

$2(x-2)(x-\frac{3}{2})(x+4) < 0$

$x \in (-\infty, -4) \cup (\frac{3}{2}, 2)$

	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		2		∞
$x-2$		−		−		−		+	
$x-3/2$		−		−		+		+	
$x+4$		−		+		+		+	
Solución		−		+		−		+	

c) $4x^5 - 27x^4 + 50x^3 - 24x^2 \geq 0$

$x^2 \cdot (4x^3 - 27x^2 + 50x - 24) \geq 0$

Raíces 2, 3, 16 y 0 doble

$x^2 \geq 0$ para todo valor de x

	4	−27	50	−24
2		8	−38	24
	4	−19	12	0

$x = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{19 \pm 13}{2} = \begin{cases} 16 \\ 3 \end{cases}$

	$-\infty$		2		3		16		∞
$x-2$		−		+		+		+	
$x-3$		−		−		+		+	
$x-16$		−		−		−		+	
Solución		−		+		−		+	

$x^2 \cdot 4(x-2)(x-3)(x-16) \geq 0$

$x \in [2, 3] \cup [16, \infty)$

40 a) $\frac{2x^2-18}{x^2-1} > 0$ $\quad \frac{2(x^2-9)}{x^2-1} > 0$ $\quad \frac{2(x-3)(x+3)}{(x-1)(x+1)} > 0$

Numerador: $2x^2 - 18 = 0 \quad x = \pm 3$

Denominador: $x^2 - 1 = 0 \quad x = \pm 1$

$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$

	$-\infty$		-3		-1		1		3		∞
$x-3$		−		−		−		−		+	
$x+3$		−		+		+		+		+	
$x-1$		−		−		−		+		+	
$x+1$		−		−		+		+		+	
Solución		+		−		+		−		+	

b) $\frac{x^2-6x-27}{x^2-13x+40} < 0$

Numerador: $x^2-6x-27=0$ $\quad x=\frac{6\pm\sqrt{36+108}}{2}=\frac{6\pm12}{2}=\begin{cases}9\\-3\end{cases}$

Denominador: $x^2-13x+40=0$ $\quad x=\frac{13\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{13\pm3}{2}=\begin{cases}8\\5\end{cases}$

$\frac{(x-9)(x+3)}{(x-8)(x-5)} < 0$

	$-\infty$	-3	5	8	9	∞
$x-9$	−	−	−	−	+	
$x+3$	−	+	+	+	+	
$x-8$	−	−	−	+	+	
$x-5$	−	−	+	+	+	
Solución	+	−	+	−	+	

$x\in(-3,5)\cup(8,9)$

c) $\frac{-x^2+14x-48}{-x^3+9x^2-18x} \geq 0$ $\quad \cdot(-1)$ $\quad \frac{x^2-14x+48}{-x^3+9x^2-18x} \leq 0$ $\quad \cdot(-1)$

$\frac{x^2-14x+48}{x^3-9x^2+18x} \geq 0$

Numerador $x^2-14x+48=0$

$x=\frac{14\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{14\pm2}{2}=\begin{cases}8\\6\end{cases}$

Denominador: $x(x^2-9x+18)$

$x=\frac{+9\pm\sqrt{81-72}}{2}=\frac{9\pm3}{2}=\begin{cases}6\\3\end{cases}$

$\frac{(x-8)(x-6)}{x(x-6)(x-3)} \geq 0$

	$-\infty$	0	3	8	∞
x	−	+	+	+	
$x-8$	−	−	−	+	
$x-3$	−	−	+	+	
Solución	−	+	−	+	

$x\in(0,3)\cup[3,8]$

41 a) $\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 5x \leq 0 \\ \dfrac{x-7}{x+3} > 0 \end{cases}$

$x^3 - 6x^2 + 5x \leq 0 \qquad x(x^2 - 6x + 5) \leq 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$ $\qquad x(x-1)(x-5) \leq 0$

Raíces: 0, 1, 5

	$-\infty$		0		1		5		∞
x		−		+		+		+	
$x-1$		−		−		+		+	
$x-5$		−		−		−		+	
Signo		−		+		−		+	

$x \in (-\infty, 0] \cup [1, 5]$

$\dfrac{x-7}{x+3} > 0$

Numerador: $x - 7 = 0 \quad x = 7$

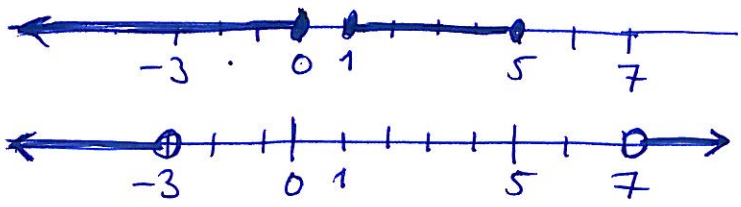
Denominador: $x + 3 = 0 \quad x = -3$

	$-\infty$		-3		7		∞
$x-7$		−		−		+	
$x+3$		−		+		+	
Signo		+		−		+	

$x \in (-\infty, -3) \cup (7, \infty)$

Solución del sistema

$x \in (-\infty, -3)$



b) $\begin{cases} x^2+7x-44>0 \\ \frac{x-8}{x-5}\le 0 \end{cases}$

$x^2+7x-44>0$

$x=\frac{-7\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{-7\pm 15}{2}=\begin{cases}4\\-11\end{cases}$

$(x-4)(x+11)>0$

	$-\infty$	-11	4	∞
$x-4$	$-$	$-$	$+$	
$x+11$	$-$	$+$	$+$	
Signo	$+$	$-$	$+$	

$x\in(-\infty,-11)\cup(4,\infty)$

$\frac{x-8}{x-5}\le 0$

Numerador $x-8=0$; $x=8$

Denominador $x-5=0$; $x=5$

	$-\infty$	5	8	∞
$x-8$	$-$	$-$	$+$	
$x-5$	$-$	$+$	$+$	
Signo	$+$	$-$	$+$	

$x\in(5,8]$

Solución sistema: $x\in(5,8]$