

INTRODUCCIÓN SOBRE MATRICES Y DETERMINANTES

1.- Definición de matriz real: Una matriz real de orden $m \times n$ siendo m y n números naturales es un conjunto de $m \times n$ números reales distribuidos en “ m ” filas y “ n ” columnas.

Ejemplos: $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$; $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 5 & -8 \\ 4 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{4 \times 3}$

A los números que componen las matrices se les llama **coeficientes**. Se representan en general por la expresión a_{ij} donde “ i ” representa la fila y “ j ” la columna en la que se encuentra.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

2.- Igualdad de matrices Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo orden y además los coeficientes colocados en el mismo lugar, valen lo mismo. (han de ser la misma matriz)

3.- Operaciones con matrices

a) Suma. Dadas dos o más matrices del **mismo orden**, su suma es otra matriz del mismo orden cuyos coeficientes se obtienen como suma de los coeficientes colocados en el mismo lugar de las matrices sumándolos.

b) Multiplicación por un número. Para multiplicar una matriz cualquiera por un número real, se multiplican todos los coeficientes de la matriz por dicho número.

c) Producto de matrices. El resultado de multiplicar dos matrices es otra matriz en la que el coeficiente que ocupa el lugar c_{ij} se obtiene sumando los productos parciales que se obtienen al multiplicar todos los coeficientes de la fila “ i ” de la primera matriz por los coeficientes de la columna “ j ” de la segunda matriz.

Nótese que para que esta operación tenga sentido tal y como se ha definido, es preciso que el número de columnas de la primera matriz, coincida con el de filas de la segunda. En caso contrario no casarían las multiplicaciones parciales. La matriz resultante tiene el número de filas de la primera y el de columnas de la segunda. Es importante subrayar también que en el caso en que se pudieran multiplicar las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$, el resultado generalmente es diferente, lo que nos dice que la multiplicación de matrices no tiene la propiedad conmutativa.

4.- Matriz traspuesta

Definición: Dada una matriz A , su **traspuesta** (A^t) es la que se obtiene al cambiar filas por

columnas en el mismo orden. Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ $A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

5.- Determinante de una matriz cuadrada

Es un número asociado a toda matriz cuadrada y que en el caso de las de 2×2 y 3×3 se calcula de las siguientes maneras.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ su determinante que se expresa $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

En el caso de que sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se calcula como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Obsérvese que en este caso los productos positivos están formados por los coeficientes de la diagonal principal y sus dos paralelas multiplicadas por el coeficiente que está en el extremo opuesta. Análogo para la secundaria y sus paralelas. Este método es conocido como la “**regla de Sarrus**”

6.- Propiedades de los determinantes

- 1.- Si una matriz cuadrada tiene una línea con todos los coeficientes 0, el determinante vale 0
- 2.- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante vale 0
- 3.- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas proporcionales, el determinante vale 0
- 4.- El determinante de una matriz cuadrada y el de su traspuesta valen lo mismo
- 5.- Si se intercambian dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo
- 6.- Si multiplicamos los coeficientes de una línea por un número, el determinante también queda multiplicado por el mismo número
- 7.- El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de dichas matrices, es decir $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- 8.- Si un determinante vale 0, las filas o columnas son linealmente dependientes y si es distinto de cero son linealmente independientes

TEMA I. ESPACIOS VECTORIALES

1.- ESPACIO VECTORIAL

Definición: Un **espacio vectorial** $(V, +, \cdot_K)$ sobre K (Cuerpo) es una estructura algebraica formada por un conjunto V a cuyos elementos llamaremos **vectores** en el que se ha definido una **ley de composición interna** (operación) que denotaremos por **“+”** que cumple las siguientes propiedades:

- Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Elemento neutro: Existe un elemento de V que denotaremos por 0 tal que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ y que llamaremos coeficiente neutro
- Elemento simétrico: Dado un elemento cualquiera $u \in V$ existe otro llamado $-\vec{u} \in V$ tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$

Con estas 4 propiedades diremos que $(V, +)$ es grupo conmutativo.

También se ha definido una **ley de composición externa** sobre un cuerpo K **“ $\cdot_K$ ”** (generalmente el cuerpo de los números reales), es decir una operación de un elemento de V con otro de K para obtener otro de V que cumple las propiedades siguientes:

- Distributiva respecto a la suma de vectores: $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$
- Distributiva respecto a la suma de escalares: $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$
- Asociativa respecto al producto de escalares y vectores: $(a \cdot b)\vec{x} = a(b\vec{x})$
- Existe elemento neutro escalar: $\forall \vec{x} \in V, \exists e \in K \mid e\vec{x} = \vec{x}e = \vec{x}$

Siendo a y b elementos de K y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de V

Al conjunto V con estas operaciones y cumpliendo las 8 propiedades se dice que es un espacio vectorial sobre K

Definición: A los elementos de V de un espacio vectorial se les llama **vectores** y a los elementos de K se les llama **escalares**.

Ejemplo:

El conjunto $\mathbb{R}^2$ que son pares de números reales (x, y) con la suma definida como:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ y la multiplicación por un número definida como:}$$

$$a(x, y) = (ax, ay) \text{ también es un espacio vectorial sobre } \mathbb{R}.$$

Análogo para $\mathbb{R}^3$ y en general $\mathbb{R}^n$.

2.- COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Definición: Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, un vector $\vec{v} \in V$ es combinación lineal de los dichos vectores, si existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tal que

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

Ejemplos de combinaciones lineales:

- a) Sean los vectores $\{(3, -2), (-1, 1)\}$. Multiplicamos el primero por -2 y el segundo por 4 quedando $-2(3, -2) + 4(-1, 1) = (-10, 8)$. Este vector $(-10, 8)$ se dice que es combinación lineal de los dos primeros.
Obviamente se podrán obtener infinitos vectores generados por ellos, sin más que cambiar los números por los que multiplicamos.

- b) ¿Es el vector $(-5, 6)$ también una combinación lineal de los dados?

Si lo fuera tendría que haber dos números a y b tales que

$$(-5, 6) = a(3, -2) + b(-1, 1)$$

Operando el segundo miembro e igualando componentes llegaríamos a un sistema que resolvemos, es decir $(-5, 6) = (3a - b, -2a + b)$ y de aquí $\begin{cases} 3a - b = -5 \\ -2a + b = 6 \end{cases}$ de donde $a = 1$ y $b = 8$. Por tanto, sí que es combinación lineal de los dos primeros

- c) ¿Es el vector $(4, -3)$ una combinación lineal de los vectores $(1, -2)$ y $(-2, 4)$?

Planteando lo mismo de antes llegamos a que $(4, -3) = a(1, -2) + b(-2, 4)$ y de aquí al sistema $\begin{cases} a - 2b = 4 \\ -2a + 4b = -3 \end{cases}$ Al resolver este sistema vemos que es incompatible.
Por lo tanto, no es combinación lineal.

3.- VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES e INDEPENDIENTES

Definición: Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, diremos que constituyen un sistema **linealmente independiente o sistema libre**, si la única forma de obtener el vector nulo como combinación lineal de ellos es que “todos los escalares” sean 0 . En caso contrario, es decir si al menos un escalar es distinto de 0 , el sistema es linealmente dependiente.

Ejemplos:

- a) ¿Cómo son los vectores $\{(3, -2); (-1, 1)\}$?

Hemos de plantear una combinación lineal igual a 0 , esto es:

$$a(3, -2) + b(-1, 1) = (0, 0).$$

El sistema que obtenemos será $\begin{cases} 3a - b = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ que al resolverlo nos da $a = b = 0$

y, por tanto, son linealmente independientes (L. I.)

- b) ¿Y los vectores $(1, -2)$ $(-2, 4)$?

Al plantear la condición $a(1, -2) + b(-2, 4) = (0, 0)$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ -2a + 4b = 0 \end{cases}$$

que es compatible e indeterminado.

Tomando por ejemplo $a = 6$ y $b = 3$ se cumple la igualdad sin que los escalares sean 0. El sistema es linealmente dependiente. (L. D.)

Obsérvese que el sistema planteado siempre es homogéneo con lo que sólo caben dos posibilidades: si es determinado, la solución es la trivial y el sistema es L. I. y si es indeterminado es L. D.

- c) Comprobar que los vectores $\{(1, 0, 1); (-2, 1, 4); (2, -3, 1)\}$ son L. I.
- d) Comprobar que los vectores $\{(1, 0, 1); (-2, 1, 4); (3, -1, -3)\}$ son L. D.

4.- SISTEMA GENERADOR

Definición: Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, diremos que es un **sistema generador** del espacio vectorial V , si cualquier vector de V se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, si $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$.

Ejemplos:

- a) Probar que los vectores $\{(3, -2); (-1, 1)\}$ son un sistema generador (S. G.) de $\mathbb{R}^2$

Cojamos un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$ por ejemplo (x_1, x_2) y escribimos

$a(3, -2) + b(-1, 1) = (x_1, x_2)$. De aquí el sistema $\begin{cases} 3a - b = x_1 \\ -2a + b = x_2 \end{cases}$ de donde obtenemos $a = x_1 + x_2$ y $b = 2x_1 + 3x_2$ lo que nos indica que sea cual sea el valor de x_1 y x_2 siempre podemos obtener el valor de “a” y “b”, y, por tanto, si que son sistema generador.

- b) ¿Y los vectores $(1, -2)$ $(-2, 4)$?

Para un vector (x_1, x_2) tendríamos $a(1, -2) + b(-2, 4) = (x_1, x_2)$ y de aquí $\begin{cases} a - 2b = x_1 \\ -2a + 4b = x_2 \end{cases}$ que al resolverlo nos queda $0 = 2x_1 + x_2$, o sea no podemos calcular el valor de “a” y “b” y, por lo tanto, no lo puede generar.

5.- BASE y DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición: Un subconjunto $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$, se denomina **base** de V si cumple que:

- a) Es un sistema de vectores linealmente independientes
b) Es un sistema generador del espacio vectorial V

Teorema de equicardinalidad de las bases: Todas las bases de un espacio vectorial que puede tener infinitas tienen el mismo número de vectores.

Definición: Al número de vectores de la base de V se le llama “**dimensión**” del espacio vectorial.

Ejemplos:

- Así la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2; la de $\mathbb{R}^3$ es 3 y en general la de $\mathbb{R}^n$ es n.
- La dimensión del subespacio vectorial formado por el $\{0\}$ tiene dimensión 0.
- A la base cuyos vectores tienen sus componentes 0 excepto una que vale 1 se le llama **“base canónica”**.
 - En $\mathbb{R}^2$ sería $\{(1,0), (0,1)\}$.
 - En $\mathbb{R}^3$ sería $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, y así sucesivamente.

6.- COORDENADAS DE UN VECTOR RESPECTO DE UNA BASE

Definición: Los coeficientes o escalares en función de los cuales se pone un vector como combinación lineal de los vectores de una base se denominan “**Coordenadas del vector en esa base**” y son únicos.

Ejemplos:

- a) Calcular las coordenadas del vector $(-5, 6)$ respecto de la base $\{(3, -2); (-1, 1)\}$
Ya hemos visto antes que $(-5, 6) = a(3, -2) + b(-1, 1)$ nos da como resultado
 $a = 1$ y $b = 8$. Dichos números 1 y 8 son las coordenadas buscadas.
- b) ¿Y respecto de la base canónica?
Obsérvese que en este caso $(-5, 6) = a(1, 0) + b(0, 1)$ nos da $a = -5$ $b = 6$, es decir,
en la base canónica, **“las componentes del vector son las coordenadas de dicho vector respecto de la base canónica”**
- c) Calcular las coordenadas de los vectores:
- 1) $(10, -6, -9)$ 2) $(1, -7, 10)$ 3) $(-1, 7, 7)$
respecto de la base $\{(1, 0, 1); (-2, 1, 4); (2, -3, 1)\}$
(Así, habría que hacer un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas para cada vector):
Solución: a) $(2, -3, 1)$ b) $(-1, 2, 3)$ c) $(5, 1, -2)$

7.- TEOREMAS RELATIVOS A BASES en $\mathbb{R}^n$

- **Teorema 1:** En $\mathbb{R}^n$ “n” vectores linealmente independientes son base.
- **Teorema 2:** En $\mathbb{R}^n$ “n” vectores que forman un sistema generador son base.

Estos teoremas nos permiten a la hora de demostrar que un sistema de vectores es una base, comprobar una sola de las dos condiciones de base.

8.- SUBESPACIO VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial y sea U un subconjunto de V . Diremos que U es un subespacio vectorial de V si es un espacio vectorial con sus coeficientes y las operaciones inducidas de V , lo definiremos más adelante propiamente.

Definición: Sea V un espacio vectorial y sea $U \subset V$ diremos que U es **subespacio vectorial** de V si y sólo si $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U$ y $\forall a, b \in K$ se verifica que:

$$a\vec{u} + b\vec{v} \in U$$

Nota: Como U ha de ser espacio vectorial ha de contener el coeficiente neutro de V

Ejemplo:

Sea $V = \mathbb{R}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$, es decir, U lo forman los vectores de $\mathbb{R}^2$ cuya primera componente vale 0.

Veamos que es un subespacio vectorial.

Cogemos dos vectores cualesquiera de U , $\vec{u} = (0, y_1)$, $\vec{v} = (0, y_2)$ y dos números reales α y β . Calculamos $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \alpha(0, y_1) + \beta(0, y_2) = (0, \alpha y_1) + (0, \beta y_2) = (0, \alpha y_1 + \beta y_2)$ que es un vector de U por tener la primera componente nula.

Por lo tanto U es subespacio vectorial.

9.- FORMAS DE EXPRESAR UN SUBESPACIO EN $\mathbb{R}^n$

En este caso nos quedaremos con las formas más importantes y muy relacionadas con la geometría analítica de $\mathbb{R}^n$:

- a) **Ecuaciones implícitas o cartesianas** que son igualdades que relacionan las diferentes componentes de los vectores.

Ejemplo1	Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 0\}$. En este caso los vectores de U son aquellos que verifican que el doble de la primera componente más la segunda es igual a 0. Vectores de U serían, por ejemplo: $(-3, 6), (2, -4), (0, 0), (\frac{5}{2}, -5)$
Ejemplo2	Sea $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. En este caso vectores de U serían: $(1, 1, -1), (0, 0, 0), (2, 3, 0), (-2, 4, 14)$

b) **Ecuaciones paramétricas.** Las componentes se relacionan mediante parámetros que son letras que pueden tomar valores arbitrarios.

Ejemplo1	Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = (\lambda, -3\lambda)\}$. En este caso nos indica que, si x toma un valor cualquiera, la y ha de valer el triple con signo cambiado. Vectores de U serían $(0, 0)$ $(1, -3)$ $(-2, 6)$ $(4, -12)$ etc..
Ejemplo2	Sea $U = \{(\lambda, 2\lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Se nos indica que los vectores de $\mathbb{R}^3$, tienen la característica de que la 1ª y la 3ª componente son opuestas y la 2ª es el doble de la 1ª; por ejemplo, los vectores $(3, 6, -3)$ y $(-1, -2, 1)$ pertenecen a U
Ejemplo3	Sea $F = \{(\lambda, \mu, \lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ En este caso se significa que la 1ª componente x_1 toma un valor arbitrario λ , la 2ª, x_2 toma otro valor independiente del 1ª que llamamos μ y la 3ª, es la resta de los dos. Por ejemplo: $(3, -1, 4)$ $(-2, 1, -3)$.

c) **Referenciando un sistema generador** En este caso los vectores de U son los generados por él o ellos.

Ejemplo1	Sea $U = L\{(1, -1)\}$. Esta forma de expresar el subespacio no indica que los vectores de él son los generados por el $(1, -1)$, es decir, por ejemplo; $(4, -4)$ $(-2, 2)$ $(0, 0)$ $(-5, 5)$ etc.
Ejemplo2	Sea $U = L\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ $U = \{a(-1, 1, 0) + b(2, 0, 1) : a, b \in K\} = \{(-a + 2b, a, b) : a, b \in K\}$

Cambio de formas de expresar subespacios vectoriales:

Es importante de cara a la resolución de problemas, el saber pasar de un modo a otro. Veamos con ejemplos como se pasa de unos a otros siguiendo las directrices siguientes.

- Para pasar de tenerlas referenciadas a un sistema generador a paramétricas, simplemente hay que poner un vector general en combinación lineal de los vectores generadores y operar. El paso del modo c) al b) está resuelto en el ejemplo2 anterior.
- En el caso que tengamos las ecuaciones paramétricas y queramos buscar unos vectores generadores, es decir, del b) al c), no habría más que sacar factor común los parámetros a y b . Por ejemplo:

Ejemplo 1: Sea $U = \{(a, -3a) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, -3) : a \in \mathbb{R}\} = L\{(1, -3)\}$

Ejemplo 2: Sea $U = \{(a - b, b, 3a + b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0, 3) + b(-1, 1, 1) : a, b \in \mathbb{R}\} = L\{(1, 0, 3), (-1, 1, 1)\}$

- Para pasar de paramétricas a implícitas es necesario eliminar los parámetros planteando el sistema y resolviéndolo. Por ejemplo:

Sea $U = \{(a, 3a) : a \in \mathbb{R}\}$. Significa que $x_1 = a$ y $x_2 = 3a$. Despejando a en ambas ecuaciones e igualando quedaría $x_2 = 3x_1$ de donde $3x_1 - x_2 = 0$ que es la ecuación cartesiana.

Ejemplo 3: Sea $U = \{(a + b, 2a, 3a - b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. De aquí

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a + b \\ x_2 &= 2a \\ x_3 &= 3a - b \end{aligned} \right\}$$

Sumando la 1ª y la 3ª eliminamos el parámetro b y queda:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4a \\ x_2 &= 2a \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación por -2 y sumándola quedaría $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

- Para pasar de implícitas a paramétricas se calcula el valor de cada componente en función de algunas de las variables, tantas como sean necesarias al resolver un sistema compatible indeterminado.

Ejemplo 4:

Sea el subespacio cuya ecuación cartesiana es $2x_1 - x_2 = 0$

Así, despejando $x_1 = \frac{x_2}{2} = \frac{a}{2}$ con lo que el subespacio será: $U = \left\{ \left(\frac{a}{2}, a \right) : a \in \mathbb{R} \right\}$ lo que nos dice que el valor de la 1ª componente es la mitad del de la 2ª.

Para evitar trabajar con fracciones se puede escribir $U = \{(b, 2b) : b \in \mathbb{R}\}$ que representa el mismo subespacio.

Ejemplo 5:

Sea $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$

El valor de cada una de ellas depende de las otras dos, por lo tanto, al calcularla tendremos que utilizar dos parámetros así por ejemplo $x_2 = a$ y $x_3 = b$, con lo que quedaría:

$x_1 = -a + 2b$, y el subespacio en ecuaciones paramétricas sería:

$U = \{(x_1, x_2, x_3) = (-a + 2b, a, b)\}$ que al sacar factor común a y b quedaría

$U = \{a(-1, 1, 0) + b(2, 0, 1) : a, b \in \mathbb{R}\} = L\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ y estaríamos en la forma c).

Ejemplo 6:

$U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, x_1 - x_2 = 0\}$, resolveríamos el sistema, al haber dos ecuaciones, dependerían de una sola incógnita

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

le damos a $x_3 = a$ y resolvemos el sistema obteniendo $x_1 = a$ y $x_2 = a$.

Luego U será

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) = (a, a, a) : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 1, 1) : a \in \mathbb{R}\} = L\{(1, 1, 1)\}$$

10.- SUBESPACIO INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

Definición: Dados dos subespacios vectoriales L y M de V , el subespacio intersección $L \cap M$, está formado por los vectores que pertenecen simultáneamente a ambos.

Nota: La forma más fácil de averiguarlo es, una vez expresados en forma implícita, resolver el sistema formado por sus ecuaciones.

Definición: Si la intersección es el vector nulo se dirá que los subespacios son **independientes**

Ejemplo1	Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y = 0\}$ y sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = (\lambda, -3\lambda)\}$ Veamos cuál es el subespacio intersección. Escribamos la ecuación implícita o cartesiana del subespacio M. Para ello eliminamos el parámetro λ Como $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow y = -3x$ es decir, $3x + y = 0$. Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones cartesianas tendremos $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ cuya solución es $x = y = 0$. Es decir, el único vector que pertenece a los dos subespacios simultáneamente es el vector nulo, que sabemos que pertenece a cualquier subespacio. Por tanto, L y M son independientes
Ejemplo 2	Sea $L = \{(\lambda, 2\lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$ Escribimos la(s) ecuación(es) cartesiana(s) de L teniendo en cuenta que $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ y eliminando el parámetro tenemos que $y = 2x, z = -x$ que son las ecuaciones buscadas. Resolvemos ahora el sistema $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ Que nos da: $x = y = z = 0$. Luego el único vector es el $(0, 0, 0)$ y los subespacios son independientes

Ejemplo 3	Sea $L = \{(x, y, z) = (-a + 2b, a, b)\}$ y $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 0\}$ Eliminamos “a” y “b” del primer subespacio. Como $\left. \begin{array}{l} x = -a + 2b \\ y = a \\ z = b \end{array} \right\}$ sustituyendo en la 1ª ecuación se tiene $x = -y + 2z$ o lo que es lo mismo $x + y - 2z = 0$. Si resolvemos ahora el sistema $\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \end{array} \right\}$ al sumar nos queda $4x - z = 0$ de donde $z = 4x$, $y = 7x$. Por tanto, la solución del sistema que es compatible e indeterminado será $(x, y, z) = (\lambda, 7\lambda, 4\lambda)$ que al sacar factor común λ $(x, y, z) = \lambda (1, 7, 4)$, es decir, el subespacio $L \cap M = L\{(1, 7, 4)\}$ y, por tanto, es de dimensión 1.
-----------	--

11.- SUBESPACIO SUMA

Dados dos subespacios vectoriales A y B del espacio vectorial E, definimos el subespacio suma de ambos que escribimos $A + B$ como aquél en el que cada uno de sus vectores se puede poner como suma de uno de A y otro de B. Es decir

Definición: La **suma de espacios vectoriales** U y W, subespacios vectoriales de V se define como el subconjunto de V:

$$H = U + W = \{\vec{v} \mid \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \vec{u} \in U \text{ y } \vec{w} \in W\}$$

Ejemplo:

Sea $A = L\{(-1, 0, 1)\}$ y sea $B = L\{(2, 1, 1)\}$ entonces,
 $A + B = \{a(-1, 0, 1) + b(2, 1, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$

Otras definiciones:

- Si A y B son independientes, la suma de A y B se llama **suma directa** y se escribe $A \oplus B$.
- Si además, la suma de A y B nos da el espacio vectorial E, siendo independientes, se llaman **subespacios vectoriales suplementarios**.

12.- RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES

Dado un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$, su rango es el número de vectores de este sistema que son linealmente independientes. Una definición equivalente es que el rango de un sistema de vectores es la dimensión del subespacio que generan

Para calcular el rango hay que tener en cuenta:

- Que el vector nulo (aquel que tiene todas sus componentes nulas) depende de cualquier otro, ya que basta multiplicar éste por 0 para obtener el nulo. Por tanto, si aparece en el sistema de vectores se puede eliminar sin que se modifique el rango del sistema.
- Si un vector se obtiene multiplicando otro por un número, es proporcional al primero, y por tanto depende de él y también se puede eliminar del sistema sin que se modifique el rango
- Si un vector es combinación lineal de otros, se puede eliminar sin que se modifique el rango.
- Importante:** Las columnas de una matriz pueden considerarse vectores y una propiedad de los determinantes nos asegura que si éste vale 0, las columnas (vectores) son linealmente dependientes pero si no es 0 los vectores que lo componen son linealmente independientes.
- En $\mathbb{R}^2$ hay a lo sumo dos vectores linealmente independientes; en $\mathbb{R}^3$ tres y en general en $\mathbb{R}^n$ hay n vectores a lo sumo L.I.

Ejemplo

Calcular el rango de los vectores: $\{(1, -2, 1) (0, 2, 4) (0, 0, 0) (-3, 6, -3) (1, 0, 5) (-2, 2, 1)\}$

El procedimiento sería el siguiente: Eliminamos el 3º por ser el nulo, el 4º por ser el 1º multiplicado por -3 , el 5º por ser la suma de los dos primeros y depende de ellos (esto no es fácil de ver. Ahora veremos cómo lo resolveríamos en el caso de no darnos cuenta).

Elegimos dos vectores que sean linealmente independientes, por ej. los dos primeros que no son proporcionales. Esto nos asegura que el rango es como mínimo 2. El 3º es evidente que se eliminaría. El 4º también por ser proporcional a uno de los dos elegidos (esto también es fácil de comprobar). Con el 5º como no está claro, formamos el determinante siguiente con los vectores en columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ lo que nos indica que la tercera columna es combinación de las dos primeras}$$

y por lo tanto se elimina también.

Y con el sexto vector hacemos lo mismo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 14 \text{ que es distinto de } 0 \text{ con lo que las tres columnas son linealmente}$$

independientes. Por tanto el rango del sistema de vectores dado es 3, que por otra parte es el valor máximo que puede ser al tratarse de vectores de $\mathbb{R}^3$ que como sabemos es un espacio vectorial de dimensión 3 y por lo tanto no puede haber más de 3 vectores linealmente independientes. Si el sistema hubiese tenido más vectores, el rango no podría haber aumentado.

13.- SUBESPACIOS AFINES

Definición: Dado un espacio vectorial V , diremos que **A es un subespacio afín de V** si:

$A = \vec{v} + F$ siendo v un vector cualquiera de V y F un subespacio vectorial de V , es decir:

$$A = \vec{v} + F = \{ \vec{z} \in V \text{ tales que } \vec{z} = \vec{v} + \vec{x} \text{ con } \vec{x} \in F \}$$

(es decir, cualquier vector de A es suma del $\vec{v}$ que es fijo y otro de F)

Ejemplo:

Sea $A = (2, 1, 1) + L\{(1, 0, -1)\}$. En este caso, $\vec{v} = (2, 1, 1)$ y $F = L\{(1, 0, -1)\}$

En A estarían por ejemplo los vectores:

$$(2, 1, 1) + (1, 0, -1) = (3, 1, 0)$$

$$(2, 1, 1) + (3, 0, -3) = (5, 1, -2)$$

$$(2, 1, 1) + (-2, 0, 2) = (0, 1, 3)$$

También puede venir el subespacio afín de esta forma:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 3\}$$

En este caso como $x_2 = 3 - x_1$ el vector:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 3 - x_1, x_3) = (0, 3, 0) + (x_1, -x_1, x_3) = (0, 3, 0) + x_1(1, -1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

Y, por tanto, A es la suma del vector $\vec{v} = (0, 3, 0)$ más el subespacio F engendrado por los vectores $(1, -1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, es decir

$$A = (0, 3, 0) + L\{(1, -1, 0) + (0, 0, 1)\}$$

Nótese que cualquier subespacio vectorial es un subespacio afín ya que siempre se puede poner como $A = \{0\} + F$. El contrario no es cierto.

El ejemplo anterior nos sirve ya que en él no estaría el vector neutro

Hiperplanos de $\mathbb{R}^n$

Definición: Un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es un **subespacio afín** de dimensión $n - 1$. Por tanto, será el conjunto de vectores que verifican una ecuación lineal. Se expresa así

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = d, \text{ con } a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

Nótese que los a_i no son simultáneamente nulas.

Ejemplos:

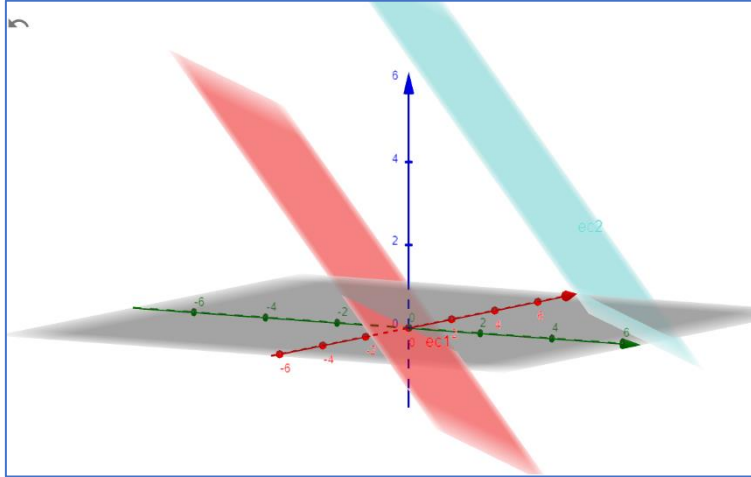
- $H_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 3x_1 + 2x_2 = 6\}$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^2$
- $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$

Subespacios afines paralelos y débilmente paralelos

Definición: Dos subespacios afines $A = \vec{v} + F$ y $B = \vec{w} + G$:

- son **paralelos** si $F = G$ (es decir, se apoyan en el mismo subespacio vectorial)
- son **débilmente paralelos** si $F \subseteq G$

Hiperplanos afines paralelos en $\mathbb{R}^3$



Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

EJERCICIOS CON SOLUCIÓN

1	¿Qué valores han de tener “ x ” e “ y ” para que los vectores $(2, 1, x)$ $(6, y, 15)$ sean linealmente dependientes?
	<u>Solución:</u> $x = 5$ e $y = 3$
2	¿Y para que sean linealmente independientes?
	<u>Solución:</u> $x \neq 5$ e $y \neq 3$
3.1	¿Pueden ser tres vectores de $\mathbb{R}^2$ una base de éste? ¿Y un vector? ¿Puede ser una base un sistema de vectores que contenga el vector nulo? ¿Puede ser una base de $\mathbb{R}^2$ dos vectores proporcionales?
	<u>Solución:</u> - No. Las bases de $\mathbb{R}^2$ sólo pueden tener dos vectores - Tampoco, deben ser 2 vectores - No ya que el vector nulo depende de los demás y por lo tanto no sería L. I. - No porque uno de ellos se puede poner como combinación del otro y por lo tanto no serían L. I.
3.2	¿Cuál de estos sistemas de vectores podrá ser una base, atendiendo a lo anterior? e.1) $\{(-1, 1), (3, -3)\}$ e.2) $\{(1, 1), (-1, 0), (2, 1)\}$ e.3) $\{(1, -3)\}$ e.4) $\{(4, 1), (-2, 0)\}$ e.5) $\{(1, 0), (-1, 3), (0, 0)\}$
	<u>Solución:</u> Solo podría ser base el e.4
4	¿Cuál es el rango de los sistemas de vectores siguientes? O dicho de otra forma, ¿cuál es la dimensión de los subespacios generados por los siguientes sistemas de vectores? 4.1.- $H = \{(1, 0, 1), (-2, 1, 4)\}$ 4.2.- $H = \{(1, -2)\}$ 4.3.- $H = \{(1, -1), (-2, 2)\}$ 4.4.- $H = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ 4.5.- $H = \{(2, 1, 0), (-2, -1, 0), (4, 2, 0)\}$ 4.6.- $H = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 1), (3, 1, -2)\}$
	<u>Solución:</u> 4.1 Dimensión 2 4.2 Dimensión 1 4.3 Dimensión 1 4.4 Dimensión 2 4.5 Dimensión 1 4.6 Dimensión 3
5	¿Cuánto tiene que valer “ a ” para que los vectores $\{(1, -1, 0), (2, 1, -3), (a, 1, 6)\}$ sean linealmente dependientes?
	<u>Solución:</u> $a = -7$
6	¿Cuánto ha de valer “ b ” para que la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores $W = L\{(1, -2, 2), (b, 6, -6)\}$ a) Sea dos

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

	b) Sea uno
	<u>Solución:</u> a) $b \neq -3$ b) $b = -3$
7	¿Qué tienen que valer “a” y “b” para que los vectores: $H = \{(1, a, -2, 0), (2, -3, 0, a), (-4, 1, 4, b)\}$ sean linealmente dependientes
	<u>Solución:</u> $a = 1$ y $b = -1$
8	Consideremos los vectores $H = \{(1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 2), (0, 1, -2, -1), (0, -1, 3, a)\}$ ¿Cuál es el valor de “a” para que el rango del sistema de vectores sea 3?
	<u>Solución:</u> Utilizando determinantes $A = 3 - a$, por tanto, será 3 si $a = 3$. Es fácil ver que tomando las 3 primeras coordenadas de los 3 primeros vectores si que el determinante queda distinto de 0.
9	Con los datos del problema anterior se cumple: - El sistema es libre para todo “a” de $\mathbb{R}$ - El sistema es ligado para todo “a” de $\mathbb{R}$ - El 2º, 3º y 4º vectores forman un sistema libre si $a = 3$ - El sistema es una base de $\mathbb{R}^4$ si $a = 1$
	<u>Solución:</u> La d) ya que por la anterior sabemos que si $a = 3$ el sistema es ligado o dependiente, luego en cualquier otro caso es L. I. y como son 4 vectores de $\mathbb{R}^4$, son una base.
10	Sean los subespacios: $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$, $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 = 0\}$. Demostrar que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$
	<u>Solución:</u> Se comprueba que $F \cap G = \{(0, 0)\}$. Como $F = L\{(0, 1)\}$ y $G = L\{(1, -2)\}$, $F + G = L\{(0, 1), (1, -2)\}$ que es una base de $\mathbb{R}^2$. Luego, $F \oplus G = \mathbb{R}^2$
11	Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$ $U = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (2, -1, a, 0)\}$, entonces indica cuales de las siguientes opciones es verdadera: - el sistema es libre si $a = 0$ - el sistema es libre si $a = -3$ - el sistema es ligado si $a = 3$ - el sistema es ligado si $a = 0$
	<u>Solución:</u> La a) es verdadera
12	Si a es un valor que hace que los vectores anteriores sean base de un subespacio y α, β, γ son las coordenadas del vector $(3, 1, 1, 0)$ respecto de dicha base, entonces comprobar que $\gamma = \frac{3}{3+a}$

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

	<u>Solución:</u> Las coordenadas son (para $a = 0$): $(3, 1, 1, 0) = \alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1, 0) + \gamma(2, -1, 0, 0),$ $\begin{cases} 3 = \alpha + 2\gamma \\ 1 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1 = \beta \end{cases}$ De donde $\alpha = \beta = \gamma = 1$ y se cumple que $1 = \frac{3}{3+0}$
13	¿Cuál de los siguientes subconjuntos es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$? a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 1\}$ b) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_3 = 1\}$ c) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 = x_3\}$ d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_1^2\}$
	<u>Solución:</u> Es la c). Ya que la a) y la b) no contienen al neutro, el vector nulo, y la d no es lineal. <u>La a) y la b) son subespacios afines, no vectoriales.</u>
14	Los vectores $\{(1, 2, a) (2, b, 6)\}$ son L. I. en $\mathbb{R}^3$ sí y solo sí a) $a \neq 3$ y $b \neq 4$ b) $a \neq 3$ o $b \neq 4$ c) $a = 3$ y $b = 4$ d) Ninguna
	<u>Solución:</u> Si fueran L. D. $a = 3$ y $b = 4$, por tanto, la negación de esa proposición es que: <u>$a \neq 3$ o $b \neq 4$ que es la b)</u>
15	¿Cuál de los siguientes sistemas de vectores es una base de $\mathbb{R}^2$? a) $(1, 0), (2, 0)$ b) $(1, 0), (0, 1), (0, 0)$ c) $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ d) $(1, 1), (1, 2)$
	<u>Solución:</u> La d), puesto que tienen que ser 2 vectores y no pueden ser los dos primeros porque son dependientes, uno es el doble del otro.
16	Sean los subespacios $F_1 = L\{(0, 1, 1)\}$ y $F_2 = L\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$ Demostrar que $F_1 + F_2 = F_2$
	<u>Solución:</u> $F_2 = L\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y como $(0, 1, 1) = (0, 1, 0) + (0, 0, 1)$, cualquier vector de F_1 es de F_2
17	Dada la base $(1, 2) (1, 1)$ calcula las coordenadas de un vector (a, b)
	<u>Solución:</u> $\alpha = b - a \quad \text{y} \quad \beta = 2a - b$
18	¿Cuál de los siguientes subconjuntos no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? a) $\{(a, b, c) : a + b + c = 0\}$ b) $\{(a, b, c) : 2b + 3c = 5a\}$ c) $\{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$ d) $\{(a, b, c) : a = 1\}$
	<u>Solución:</u> La d) por no contener al neutro
19	¿Para qué valores de b los vectores $(b, -3, 2), (2, 3, b), (4, 6, 4)$ no son una base de $\mathbb{R}^3$?

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

	<u>Solución:</u> Haciendo el determinante resulta $ \quad = -6b^2 + 24$ e igualando a 0, resultan $b = 2$ o $b = -2$
20	La dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$ es
	<u>Solución:</u> La dimensión es 2 sin más que hacer el determinante
21	Sean las bases de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -1), (0, 2)\}$ y $B' = \{(-1, 0), (2, 1)\}$. Si las coordenadas de un vector respecto de la 1ª son -1 y 1 , ¿cuáles son las coordenadas respecto de la 2ª base?
	<u>Solución:</u> El vector sería $-1 \cdot (1, -1) + (0, 2) = (-1, 3)$ Las coordenadas de este vector en la nueva base serían $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ Por tanto, las coordenadas en la nueva base serán $(7, 3)$
22	Dados los subespacios $L = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_3, x_2 = 0\}$ y $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\}$. Demostrar que $L \oplus M = \mathbb{R}^3$
	<u>Solución:</u> Como $L = L\{(1, 0, 1)\}$ y $M = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ y como son independientes y además $L + M = \mathbb{R}^3$, por tanto, los subespacios L y M son suma directa.
23	Sean los vectores $(a, -1, 1), (-1, 2, -1), (0, a, 0)$. Si “r” es el rango de los tres vectores, entonces: a) $r = 3$ si $a = 1$ b) $r = 2$ si $a = 0$ c) $r = 1$ si $a = 0$ d) $r = 2$ si $a = -1$
	<u>Solución:</u> La solución correcta es la b) sin más que hacer el determinante que resulta: $ \quad = a^2 - 1 = a(a - 1)$
24	Sean los vectores $(2, 3, 0), (0, 1, 2), (2, 2, -2), (-2, -1, 4)$. ¿Cuáles son sus ecuaciones cartesianas? a) $x_1 + x_2 = 0$ $x_1 - x_3 = 0$ b) $x_3 = 0$ c) $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ d) $\mathbb{R}^3$
	<u>Solución:</u> Comprobando las que verifican los vectores se comprueba que es la c)
25	¿Cuál es el rango del sistema de vectores anterior?
	<u>Solución:</u> Es de dimensión 2, sin más que restar a $3(\dim \mathbb{R}^3) - 1$ (número de ecuaciones independientes)
26	Dados los subespacios vectoriales:

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

	$F_1 = L\{(1, 1, 1)\}$ y $F_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 2x_2, x_3 = 3x_2\}$. Determinar cuál de estos vectores no pertenece a $F_1 + F_2$: a) $(3, 2, 4)$ b) $(2, 1, 3)$ c) $(1, 1, 1)$ d) $(3, 2, 1)$
	<u>Solución:</u> El subespacio suma estaría formado por vectores del tipo $a(1,1,1) + b(2,1,3) = (a + b, a + 2b, a + 3b)$ <u>El vector a) cumple ser de este tipo para $a = 1$ y $b = 1$</u>
27	Los vectores $(3, 0, a, -1)$ $(1, 1, 0, b)$ $(2, 5, b, -4)$ son L. D. si: a) $a = 1$ y $b = -1$ b) $a \neq 1$ y $b \neq -1$ c) $a \neq 1$ o $b \neq -1$ d) $a = 1$ o $b = -1$
	<u>Solución:</u> La a) es la solución sin más que calcular el rango de los vectores puestos en forma de matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b \\ 2 & 5 & b & -4 \\ 3 & 0 & a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 3 & b & -4-2b \\ 0 & -3 & a & -1-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 3 & b & -4-2b \\ 0 & 0 & a+b & -5-5b \end{pmatrix}$ <u>Para que la última sea una fila de ceros $a = -b = 1$</u>
28	Calcula la dimensión del sistema de vectores y su ecuación en paramétricas y cartesianas: $H = \{(2, 3, 0), (0, 1, 2), (2, 2, -2), (-2, -1, 4)\}$
	<u>Solución:</u> Aplicando el método de diagonalización de Gauss, nos queda que: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Por tanto, la dimensión es 2, y sólo habrá dos ecuaciones paramétricas y una ecuación implícita Paramétricas : $H = \{a(2,3,0) + b(2,2,-2) : a, b \in \mathbb{R}\}$ Para pasar a cartesianas eliminamos el parámetro: $\begin{cases} x = 2a + 2b \\ y = 3a + 2b \\ z = -2b \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2a - z \\ y = 3a - z \end{cases}$ Despejando la a quedaría: $\frac{x+z}{2} = \frac{y+z}{3} \Rightarrow 3x + 3z = 2y + 2z \Rightarrow 3x - 2y + z = 0$

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

PROBLEMAS RESUELTOS

1	Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 2), (0, 1, -2, -1), (0, -1, 3, a)\}$. Entonces: a) $\dim U = 2$ si $a = -3$ b) $\dim U = 3$ si $a = 3$ c) $\dim U = 3$ si $a \neq 3$ d) $\dim U = 4$ si $a \neq -1$
	<u>Solución:</u> Como son vectores de $\mathbb{R}^4$, el rango a lo sumo será 4. Como los dos primeros vectores son L.I. por no ser proporcionales, el rango que determinan ellos es 2. Veamos si el tercero es combinación lineal de los dos primeros. Escribimos: $(0, 1, -2, -1) = \alpha (1, 1, 0, 1) + \beta (0, 0, 1, 2)$, y de aquí obtenemos el sistema $\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{array} \right\}$ que no tiene solución al darnos dos valores distintos para las incógnitas. Esto significa que el tercer vector no depende de los dos primeros y el rango es 3. Veamos ahora bajo qué condiciones, el cuarto depende de los tres primeros. Escribimos $(0, -1, 3, a) = \alpha (1, 1, 0, 1) + \beta (0, 0, 1, 2) + \gamma (0, 1, -2, -1)$ que nos conduce al sistema: $\left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = -1 \\ \beta - 2\gamma = 3 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = a \end{array} \right\}$ De las tres primeras obtenemos: $\alpha = 0$; $\gamma = -1$; $\beta = 1$ que sustituídos en la última ecuación nos da $a = 3$. Para este valor, el cuarto vector depende de los tres primeros y si a es distinto de 3 el rango es 4. La respuesta es la b). Otra opción es calcular el determinante 4x4 que resulta $\quad = 3 - a$, de donde sale que $a = 3$ es el valor que reduce el rango y viendo que el determinante de los 3 primeros vectores y las 3 primeras componentes es distinto de cero, ya estaría determinada la b)
2	Sea $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial V de dimensión finita no nulos. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones puede ser falsa? a) $\text{ran}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \text{ran}\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ b) $\text{ran}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \text{ran}\{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

	c) $\text{ran}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = 1 + \text{ran}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ d) $\text{ran}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\} = \text{ran}\{\vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$
	<u>Solución:</u> Por teoría sabemos que la a), b) y d) son ciertas. La c) puede ser falsa si el vector $\vec{v}_1$ es combinación lineal de los otros tres. En este caso, el rango no aumenta en una unidad.
3	Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$: $F = L\{(0, 2)\}$ y $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + x_2 = 0\}$. Se verifica: a) $F \cap G = \Phi$ (conjunto vacío) b) F y G son subespacios vectoriales independientes, pero $F \oplus G \neq \mathbb{R}^2$ c) F y G son subespacios vectoriales independientes y $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ d) F y G no son subespacios vectoriales independientes
	<u>Solución:</u> $G = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 2x_1 + x_2 = 0\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = -2x_1\} = \{(x_1, -2x_1)\} = \{x_2(1, -2)\} = L\{(1, -2)\}$ Como los dos vectores que generan F y G son L.I forman una base de $\mathbb{R}^2$, se cumple que: $F + G = \mathbb{R}^2$ y como son independientes, entonces $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ que es la c)
4	Consideremos las bases de $\mathbb{R}^2$ siguientes: $B = \{(1, -1) (0, 2)\}$ y $B' = \{(-1, 0) (2, 1)\}$. Si las coordenadas del vector $\vec{u}$ respecto a B son $(-1, 1)$, entonces las coordenadas del vector $\vec{u}$ respecto de B' son: a) (5,7) b) (7,5) c) (7,3) d) (-3,7)
	<u>Solución:</u> Sabemos que $\vec{u} = -1(1, -1) + 1(0, 2) = (-1, 3)$. Ahora lo ponemos en función de la base B'. Queda $(-1, 3) = a(-1, 0) + b(2, 1)$ y de aquí el sistema $\begin{cases} -a + 2b = -1 \\ b = 3 \end{cases}$ que nos da $b = 3$ y $a = 7$ que es la c)

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

5	Consideremos en subconjunto de $\mathbb{R}^2$: $A_K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = k, a, b, k \in \mathbb{R}\}$ Si $k = 0$ qué opción es incorrecta: a) A_0 es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ cualesquiera que sean a y b b) Si $a = b = 0$ entonces $A_0 = \mathbb{R}^2$ c) $A_0 = L\{(b, a)\}$ cualesquiera que sean a y b d) $(0, 0) \in A_0$ cualesquiera que sean a y b
	<u>Solución:</u> La a) es correcta ya que $A_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / ax_1 + bx_2 = 0\}$ sería el subespacio dado mediante su ecuación cartesiana. La b) también sería correcta ya que si $a = b = 0$, tendríamos $A_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 0x_1 + 0x_2 = 0\}$ y cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ lo cumpliría. La d) también ya que si $A_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / ax_1 + bx_2 = 0\}$, el vector $(0, 0)$ cumple esta ecuación. La incorrecta por tanto es la c), porque sería $(-b, a)$
6	Determinar cuál de los siguientes subespacios afines de $\mathbb{R}^3$ es paralelo al hiperplano $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_3 = 4\}$. a) $(3, 0, 0) + L\{(1, 0, 1)\} + L\{(0, 1, 0)\}$ b) $(3, 0, 3) + L\{(1, 0, 0)\} + L\{(0, 1, 0)\}$ c) $(0, 3, 0) + L\{(1, 0, 1)\} + L\{(0, 0, 1)\}$ d) $(0, 0, 3) + L\{(1, -1, 0)\}$
	<u>Solución:</u> Sabemos por teoría que dos subespacios afines $\vec{v} + F$ y $\vec{w} + G$ son paralelos si los subespacios vectoriales F y G son el mismo. Veamos qué vectores generan el hiperplano Como $x_1 - x_3 = 4$, tenemos que $x_1 = x_3 + 4$ y nos quedaría: $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_3 = 4\} = \{(4, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(1, 0, 1)\} =$ $= (4, 0, 0) + L\{(1, 0, 1)\} + L\{(0, 1, 0)\}.$ La respuesta correcta es la a) por tener los mismos vectores generadores.
7	Considere los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$: $L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3; x_2 = 0\} \text{ y}$

Espacios Vectoriales	Apuntes sencillos	Javier Burgos
----------------------	-------------------	---------------

	dimensión del espacio vectorial menos el número de vectores que componen una base de dicho subespacio (su dimensión). En este caso, $\mathbb{R}^3$ es de dimensión 3 y la dimensión del subespacio es 1. Por lo tanto, serían dos las ecuaciones cartesianas y la respuesta tendría que ser la c) no la a) ni la b)
--	--

JAVIER BURGOS